

# Մաթեմատիկան Դ Պ Ը Ո Ց Ո Ի Մ

Mathematics

Математика

in

В

School

Школе



Scientific  
methodical journal

Գիտամեթոդական  
ամսագիր

Научно-методический  
журнал

ISSN 1829-4111

№ 5 (118) 2025

### Խմբագրական խորհուրդ

Գևորգյան Ս.Ռ., հ.գ.դ., պրոֆեսոր, խորհրդի  
պատվավոր նախագահ  
Միքայելյան Հ.Ս., մ.գ.դ., ֆ.մ.գ.թ., պրոֆեսոր,  
գլխավոր խմբագիր  
Բաղդասարյան Գ.Ե., ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս,  
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր  
Գևորգյան Գ.Գ., ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս, ֆ.մ.գ.դ.,  
պրոֆեսոր  
Զաքարյան Վ.Ս., ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս, ֆ.մ.գ.դ.,  
պրոֆեսոր  
Ղազարյան Է.Մ., ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս, ֆ.մ.գ.դ.,  
պրոֆեսոր  
Նահապետյան Բ.Ս., ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ,  
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր  
Այվազյան Է.Ի., մ.գ.դ., պրոֆեսոր  
Իգոշին Վ.Ի., մ.գ.դ., պրոֆեսոր, ՌԴ  
Ղազարյան Հ.Գ., ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր  
Մկրտչյան Մ.Ա., մ.գ.դ., պրոֆեսոր  
Մկրտչյան Վ.Ս., տ.գ.դ., պրոֆեսոր, Ավստրալիա  
Մովսիսյան Յու. Մ., ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր  
Ղուշյան Ա. Խ., մ.գ.թ., պրոֆեսոր  
Նոսկով Մ.Վ., ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր, ՌԴ  
Ռոդիոնով Մ.Ա., մ.գ.դ., պրոֆեսոր, ՌԴ  
Ուրբան Մ.Ա., մ.գ.դ., պրոֆեսոր, Բելառուս  
Իսախրյան Մ. Մ., մ.գ.թ., դոցենտ  
Հակոբյան Ս. Է., փ.գ.թ., դոցենտ  
Հայրապետյան Գ. Ս., մ.գ.թ., դոցենտ  
Հարությունյան Հ. Հ., ֆ.մ.գ.թ., դոցենտ  
Հովհաննիսյան Ք.Ա., մ.գ.թ., դոցենտ,  
պատասխանատու քարտուղար  
Կուզնեցովա Ե.Պ., մ.գ.թ., դոցենտ, Բելառուս  
Մկրտչյան Ա.Տ., մ.գ.թ., դոցենտ, գ. խ. տեղակալ  
Ենոքյան Ա.Վ., մ.գ.թ., ասիստենտ  
Նավասարդյան Հ.Ս., մ.գ.թ., ուսուցիչ  
Ավազյան Ա.Հ., դասախոս  
Ղազարյան Ն.Ա., ուսուցչուհի  
Սեդրակյան Ն.Մ., ուսուցիչ, Ղազախստան

ՀՀ ԿԳՄՍ նախարարություն  
RA Ministry of Education, Science, Culture, Sports  
Министерство ОНКС РА  
Խ. Արովյանի անվան հայկական պետական  
մանկավարժական համալսարան  
Armenian State Pedagogical University after Kh. Abovyan  
Армянский государственный педагогический университет  
имени Х. Абовяна  
«Մաթեմատիկան դպրոցում»  
Գիտամեթոդական ամսագիր  
Հրատարակվում է 1998 թվականից  
"Mathematics in school"  
Scientific methodical journal  
Published since 1998  
«Математика в школе»  
Научно-методический журнал  
Издается с 1998 г.  
Վկայական N01A044424, տրված է ՀՀ ԱՆ կողմից ,  
16.02.1999թ.  
Certificate N01A044424, issued by RA MJ, 16.02.1999.  
Certificate N01A044424, issued by RA MIO, 16.02.1999.-  
Երևան, Խանջյան 5, սենյակ 314  
Yerevan, Khanjyan 5, room 314  
Ереван, Ханджян 5 / 314  
Phon: +37493881707  
E-mail: h.s.mikaelian@gmail.com  
Interet:  
Նկարիչ՝ Վ. Միքայելյան  
Համակարգչային ձևավորում՝ Ա. Մկրտչյան  
  
Թողարկման պատասխանատու՝  
Հ.Ս. Միքայելյան

2025  
№ 5 (118)

Հուլիս  
July  
Июль

# Математика в школе

# Mathematics in school

## Редколегия

**Геворгян С.Р.** д.пс.н., профессор, почетный председатель редколлегии  
**Микаелян Г. С.**, доктор педагогических наук, к.ф.м.н., профессор, главный редактор  
**Багдасарян Г.Э.**, академик НАН РА, д.ф.м.н., профессор  
**Газарян Э.М.**, академик НАН РА, д.ф.м.н., профессор  
**Геворгян Г.Г.**, академик НАН РА, д.ф.м.н., профессор  
**Нагапетян Б.С.**, член-корреспондент НАН РА, д.ф.м.н., профессор  
**Айвазян Э.И.**, д.п.н., профессор  
**Газарян А.Г.**, д.ф.м.н., профессор  
**Гущян А. Х.**, к.п.н., профессор  
**Игошин В. И.**, д.п.н., профессор, РФ  
**Мкртчян М.А.**, д.п.н., профессор  
**Мкртчян В. С.**, д.т.н., профессор, Австралия  
**Мовсисян Ю. М.**, д.ф.м.н., профессор  
**Носков М.В.**, д.ф.м.н., профессор, РФ  
**Родионов М.А.**, д.п.н., профессор, РФ  
**Урбан М.А.**, д.п.н., профессор, Беларусь  
**Акопян С.Е.**, к.ф.н., доцент  
**Айрапетян Г.С.**, к.п.н., доцент  
**Арутюнян А.Х.**, к. ф.м.н., доцент  
**Испирян М. М.**, к.п.н., доцент  
**Кузнецова Е.П.**, к.п.н., доцент, Беларусь  
**Мкртчян А.Т.**, к.п.н., доцент, заместитель главного редактора  
**Ованнисян К.А.**, к.п.н., доцент, ответственный секретарь  
**Енокян А.В.**, к.п.н., Австрия  
**Навасардян А.С.**, к.п.н., преподаватель  
**Авагян А.Г.**, преподаватель  
**Казарян Н.А.**, преподаватель  
**Седракян Н.М.**, преподаватель, Казахстан

## Editorial board

**Gevorgyan S.R.** d.pss., Professor, Honorary Chairman of the Board  
**Mikaelyan H.S.**, d.p.s., Professor, Editor-in-Chief  
**Baghdasaryan G.E.**, Academ. of NAS RA, d.p.m.s., Professor  
**Gazaryan E.M.**, Academ. of NAS RA, d.p.m.s, Professor  
**Gevorgyan G.G.**, Academ. of NAS RA, d.p.m.s, Professor  
**Nagapetyan B.S.**, Corresponding Member of NAS RA, d.p.m.s, Professor  
**Ayvazyan E.I.**, d.p.s., Professor  
**Gazaryan H.G.**, d.p.m.s, Professor  
**Gushchyan A.Kh.**, Ph.D of pe., Professor  
**Igoshin V.I.**, d.p.m.s., Professor, RF  
**Mkrtchyan M.A.**, d.p.s., Professor  
**Mkrtchyan V.S.**, d.t.s., Professor, Australia  
**Movsisyan Yu.M.**, d.p.m.s, Professor  
**Noskov M.V.**, d.p.m.s, Professor, RF  
**Rodionov M.A.**, d.p.s, Professor, R.F.  
**Urban M.A.** d.p.s, Professor, Belarus  
**Hakopyan S. E.**, Ph.D of ph., Associate Professor  
**Harutyunyan H.Kh.**, Ph.D of math, Associate Professor  
**Hayrapetyan G.S.**, Ph.D of pe., Associate Professor  
**Hovhannisyan K.A.**, Ph.D. of pe., Associate Professor, responsible secretary  
**Ispiryan M. M.**, Ph.D of pe., Associate Professor  
**Kuznetsova E.P.**, Ph.D of pe., Associate Professor, Belarus  
**Mkrtchyan A.T.**, Ph.D of pe., Associate Professor, Deputy Chief Editor  
**Enokyan A.V.**, Ph.D of pe, Austria  
**Navasardyan A.S.**, Ph.D of pe., Lecturer  
**Avagyan A.G.**, Lecturer  
**Kazaryan N.A.**, Lecturer  
**Sedrakyan N.M.**, teacher, Kazakhstan

# Մաթեմատիկան

## Դպրոցում

### ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

#### ԳԻՏԱՄԵԹՈԴԱԿԱՆ

##### Ս.Զ. Հարությունյան

ԽՄԲԱՅԻՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 4 ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ -----7

#### ՄԻՋԱՌԱՐԿԱՅԱԿԱՆ

##### Լ.Ն. Պետրոսյան

ԿՈՌԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴԸ ԵՐԿՐԱԶՓԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ-----14

##### Գ.Ս. Ադամյան

ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ԳՐԱՖԻԿԱԿԱՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ԿԻԱՌՈՒՄԸ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ  
ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱ-----28

#### ՕԳՆՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՍՈՒՑՉԻՆ

##### Հ.Ս. Միքայելյան, Ա.Տ. Մկրտչյան

ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԻՋԻՆ ԴՊՐՈՑԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ-----41

##### Ա.Հ. Մուրադյան

ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐԸ ՄԻՋԻՆ ԴՊՐՈՑԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ  
ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՈՒՄ-----51

ԽՈՐԱՑՎԱԾ ՈՒՍՈՒՑՈՒՄ

##### Տ.Ա. Կոստանյան

ԵՐՐՈՐԴ ՈՏՆԱԿԱՅԻՆ ԶԱՌԱՆԿՅԱՆ ՄԱՍԻՆ-----61

#### ԱՐԺԵՀԱՄԱԿԱՐԳ

##### Մ.Ա. Աբգարյան

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ՈՐՊԵՍ ԳՈՐԾԻԶԱՅԻՆ ԱՐԺԵԶ-----66

##### Հ.Ս. Միքայելյան

ԳԵՂԵՑԻԿԸ, ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ

ԿՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ-----73

Թիվ 5(118), Հուլիս, 2025

# Mathematics

## In Shcool

### CONTENTS

#### SCIENTIFIC METHODOICAL

*S.K. Haroutunian*

GROUP ACTIVITY IN THE COURSE MATHEMATICS 4-----7

#### INTERDISCIPLINARY

*L.N. Petrosyan*

COORDINATE METHOD IN GEOMETRIC TASKS ----- 14

*G.S. Adamyan*

APPLICATION OF GRAPHICAL REPRESENTATION OF ALGORITHMS  
IN SOLVING PARAMETRIC EQUATIONS-----28

#### HELP TO THE TEACHER

*H.S. Mikaelian, A.T. Mkrtchyan*

EQUALITY IN THE MIDDLE SCHOOL CALCULUS COURSE -----41

*A.H. Muradyan*

THE IDEA OF EQUATION IN THE PROCESS OF TEACHING CALCULUS IN MIDDLE  
SCHOOL-----51

#### IN-DEPTH LERNING

*T.A. Kostanyan*

ABOUT THIRD PEDAL QUADRANGLE -----61

#### VALUE SYSTEM

*M.A. Abgaryan*

MATHEMATICS AS AN INSTRUMENTAL VALUE-----66

*H.S. Mikaelian*

BEAUTY, MATHEMATICS AND MATHEMATICAL EDUCATION -----74

# Математика

## В школе

### СОДЕРЖАНИЕ

#### НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ

*С.Х. Арутюнян*

ГРУППОВАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ПО КУРСУ МАТЕМАТИКА 4-----7

#### МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ

*Л.Н. Петросян*

МЕТОД КООРДИНАТ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ -----14

*Г.С. Адамян*

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГОРИТМОВ ПРИ РЕШЕНИИ  
ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ-----28

#### В ПОМОЩЬ УЧИТЕЛЮ

*Г.С. Микаелян, А.Т. Мкртчян*

РАВЕНСТВО В КУРСЕ АЛГЕБРЫ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ-----41

*А.Г. Мурадян*

ИДЕЯ УРАВНЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ИСЧИСЛЕНИЮ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ-----51

#### УГЛУБЛЕННОЕ ОБУЧЕНИЕ

*Т.А. Костанян*

О ТРЕТЬЕМ ПЕДАЛЬНОМ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКЕ-----61

#### СИСТЕМА ЦЕННОСТЕЙ

*М.А. Абгарян*

МАТЕМАТИКА КАК ИНСТРУМЕНТАЛЬНАЯ ЦЕННОСТЬ-----66

*Г.С. Микаелян*

КРАСОТА, МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ-----74

**ԽՄԲԱՅԻՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 4 ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ**

**ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ ՍԱՄՎԵԼ ԶՐԻՍԱՎՓՈՐԻ**

**ORCID 0000\_0003\_0605\_9815**

**Խ. Աբովյանի անվան Հայկական պետական մանկավարժական համալսարան**



*Հարությունյան Ս. Զ., ֆիզմաթ գիտ. դոկտոր,  
պրոֆեսոր*

**Ներածություն**

Սույն աշխատանքի նպատակն է նկարագրել մեր մաթեմատիկայի չորրորդ դասարանի դասագրքի [ 1 ] հիմնական առանձնահատկությունները և դրանով օգնել ուսուցիչներին աշխատելու այդ դասագրքով: Նշված դասագիրքը վերջինն է կրտսեր դպրոցի դասագրքերի ընտանիքում և այդ պատճառով տարբերվում է մնացածներից: Այստեղ անհրաժեշտ է ամփոփել և ավարտուն տեսքի բերել կրտսեր դպրոցում ծրագրով նախատեսված ուսումնական նյութը: Մյուս կողմից, այդ դասընթացը նախապատրաստական է 5-6-րդ դասարանների դասընթացի համար: Այս պարագաները որոշակիորեն ազդում են ինչպես դասագրքի բովանդակության, այնպես էլ ուսուցման գործընթացի վրա: Ծրագրային նյութի ծավալը բավական մեծ է, ժամաքանակը՝ խիստ սահմանափակ և բնականաբար հարց է առաջանում, թե ինչպես ընդարձակ ուսումնական նյութը տեղավորել այդ ժամաքանակում: Այդ և մի շարք այլ խնդիրներ արդյունավետ կարող են լուծվել ուսուցման ժամանակակից մանկավարժական տեխնոլոգիաների ակտիվ կիրառման շնորհիվ: Դրանց կիրառությունը էապես զարգացնում է ուսուցման ողջ գործընթացը, դասարանի աշակերտական անձնակազմը դարձնում միասնական հետազոտական մարմին, որը ընդունակ է լուծել ամենատարբեր ուսումնական, հետազոտական, ստեղծագործական խնդիրներ: Ավելացնենք, որ այդ ընթացքում որոշակիորեն բարձրանում է աշակերտների առաջադիմությունը:

## **Ուսուցման ժամանակակից մանկավարժական տեխնոլոգիաները մաթեմատիկա 4 դպրոցական դասընթացում**

Այդ տեխնոլոգիաների նկարագրությունը տրվել է Մաթեմատիկա -2 դասագրքի մեթոդական ուղեցույցում [ 2 ]: Այստեղ կանոնադրաբանորեն դրանց հիմնական բաղադրիչներից մեկին՝ խմբային աշխատանքին և նախագծերի տեխնոլոգիային [ 3 ] (որը քիչ է քննարկվել վերը նշված ուղեցույցում):

Մաթեմատիկայի ուսուցման արդիականացման ոլորտում ընթացող գործընթացները կամա թե ակամա ենթադրում են ուսուցման ժամանակակից մանկավարժական տեխնոլոգիաների ներմուծման և խորացման ակտիվացումը: Շատ շատերին թվում է, որ երբ խոսում են ուսուցման ժամանակակից տեխնոլոգիաների մասին, նկատի ունեն ուսուցման գործընթացում միայն համակարգչային տեխնիկայի կիրառությունը: Իրականում խոսքը մի շարք մանկավարժական տեխնոլոգիաների մասին է: Դրանք հիմնված են Յան Ամոս Կոմենսկուի §Մեն դիդակտիկա՝ հռչակավոր աշխատության [ 4 ] հիման վրա ստեղծված ուսուցման գործընթացի վարման տարբեր յուրահատուկ մոտեցումների վրա:

Ուսուցման ավանդական տեխնոլոգիան, որին հետևում է մեր դպրոցի ուսուցիչների մեծամասնությունը, իր արժանիքների հետ մեկտեղ աչքի է ընկնում նաև որոշակի թերություններով: Աշակերտների որոշակի մասը ուսուցման գործընթացի սկզբնական մասում աստիճանաբար դուրս է մնում այդ գործընթացից: Այստեղ ուսուցիչները կարծես թե հետևում են չինացի իմաստուն Կոնֆուցիոսի §Սովորեցրո՛ւ միայն նրան, ով գիտակցելով իր անգրագիտությունը, ցանկանում է վերացնել այն՝ դրույթին: Դա այն աշակերտներն են, որոնք չունեն սովորելու ձգտում: Նրանցից հետո աստիճանաբար դուրս են մնում ոչ շատ ընդունակ աշակերտները: Այդ դեպքի համար Կոնֆուցիոսը ասել է §Սովորեցրո՛ւ միայն նրան, ով ծանոթանալով եռանկյան մի անկյանը, կաողանում է պատկերացում կազմել մնացած անկյունների մասին՝: Նույնիսկ կրտսեր դպրոցում աշակերտական կազմի զգալի մասը չի կարողանում ակտիվ մասնացնել ուսուցման գործընթացին:

Բոլորին հայտնի է, որ 2-6 տարեկան երեխաները իրենց գիտելիքների, կարողությունների, հմտությունների, ունակությունների մեծ մասը ձեռք են բերում զանազան խաղերի ընթացքում: Այլ կերպ ասած, նրանք ձեռք են բերում այդ ամենը ինքնուրույն, սեփական ակտիվության շնորհիվ: Հենց այդ պարագան բավական թույլ է արտահայտված ուսուցման ավանդական տեխնոլոգիայի դեպքում: Այստեղ դասարանի գլխավոր դերը բոլոր պարագաներում ուսուցիչն է: Աշակերտները պարտավոր են ուշադիր լսել նրան, աշխատել հիշել նրա տրամադրած տեղեկատվությունը և վերարտադրել այն: Եթե աշակերտն ունի լավ հիշողություն (ինչը ժամանակակից ձեռքի հեռախոսների շնորհիվ դարձել է հազվադեպ երևույթ), ապա նա այդ համակարգում կարող է հաջողությամբ ավարտել ուսուցման գործընթացը: Բնականաբար աշակերտների մեծամասնության համար առաջանում են բազմաթիվ բարդություններ:

Ցածր առաջադիմությամբ աշակերտների շրջանում առաջանում են զանազան հոգեբանական բարդություններ, որոնք ժամանակի ընթացքում ընդլայնվում են և խորանում: Չնայած այդ ամենին, ուսուցման ավանդական տեխնոլոգիան իր դրական կողմերի հաշվին կարող է օգտակար լինել, եթե այն գործում է ժամանակակից տեխնոլոգիաների հետ միասին:

Այսօր մաթեմատիկայի դպրոցական կրթության առաջատար աշխարհում ճանաչված է Ճապոնիան: Այդ երկրում ուսուցչի կարգավիճակը շատ բարձր է (նաև աշխատավարձը), սակայն ուսուցիչները պարտավոր են հանձնել մի քանի քննություն, որոնց ընթացքում ամրագրվում են ոչ միայն թեկնածուի մասնագիտական գիտելիքները (տեսական նյութի անթերի իմացություն, խնդիրների լուծման հմտություն, գծագրերի կառուցում և այլն), այլև ուսումնական նյութը զանազան մանկավարժական տեխնոլոգիաներով ուսուցանելու վարպետությունը: Նրանց

մասնագիտական և մեթոդական փորձը հուշում է, որ նման մոտեցումներ կարելի է կիրառել նաև մեր դպրոցում:

Բնական հարց է ծագում՝ ինչպե՞ս կռահել որ տրված դասագիրքը կազմված է ուսուցման ժամանակակից մանկավարժական տեխնոլոգիաների կիրառման ոգով: Ցանկացած հեղինակ կարող է պնդել որ իր դասագիրքը կազմված է այդ ոճով: Մակայն հետևյալ հայտանիշները ցույց են տալիս որ դասագիրքը իսկապես բավարարում է այդ պայմանին: Օրինակ **1** (մաս **I**, Գործողություններ բազմանիշ թվերի հետ, **§11**, առաջադրանք **5**): Համեմատի՛ր հետևյալ հարցերը: Ճշմարի՛տ է արդյոք, որ

|                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                         |                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Եթե երկու բնական թվերից յուրաքանչյուրը բաժանվում է միևնույն միանիշ թվի, ապա դրանց գումարը և տարբերությունը նույնպես բաժանվում են այդ միանիշ թվին: | Եթե երկու բնական թվերից յուրաքանչյուրը չի բաժանվում միևնույն միանիշ թվի, ապա այդ թվերի գումարը և տարբերությունը նույնպես չեն բաժանվում այդ միանիշ թվին: | Եթե երկու բնական թվերից մեկը բաժանվում է միանիշ թվի, իսկ մյուսը՝ ոչ, ապա այդ թվերի գումարը և տարբերությունը չեն բաժանվում այդ միանիշ թվին: |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Պատասխանը հիմնավորի՛ր օրինակներով և քննարկի՛ր համադասարանցիների հետ:

Օրինակ **2** (մաս **II**, Մեծություններ, **§1**, առաջադրանք **16**):

Համեմատի՛ր հետևյալ հարցերը.

|                                                                                                                     |                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ի՞նչ թվաբանական գործողություններ կարող ես կատարել արագության հետ՝ գումարել, հանել, բազմապատկել, բաժանել, գրոյացնել: | Ի՞նչ թվաբանական գործողություններ կարող ես կատարել ժամանակի հետ՝ գումարել, հանել, բազմապատկել, բաժանել, գրոյացնել: |
| Ինչի՞ց է կախված արագությունը՝ ա) վայրից (միջավայրից), բ) եղանակից, գ) շարժվող մարմնից:                              | Ճշմարի՛տ է արդյոք, որ ժամանակը որևէ պարագայից կախյալ չէ:                                                          |

Պատասխանը հիմնավորի՛ր և քննարկի՛ր համադասարանցիների հետ:

Ինչպես տեսնում ենք, երկու դեպքում էլ առաջարկվում է պատասխանը քննարկել համադասարանցիների հետ: Դա մղում է ուսուցչին կազմակերպել աշակերտների համատեղ աշխատանք, այսինքն՝ դիմել խմբային աշխատանքին: Առաջին օրինակի դեպքում հնարավոր է կիրառել շերտավոր ուսուցման տեխնոլոգիան (հատկապես եթե դասարանի աշակերտական անձնակազմը դեռ ուժեղ չէ): Երկրորդ օրինակի դեպքում ուսուցիչն ունի ավելի լայն ընտրության հնարավորություն: Նա կարող է կազմել չորս խումբ և կազմակերպել աշակերտների հետազոտական աշխատանքի քննարկում: Օրինակ **3** (մաս **I**, Սովորական կոտորակներ, **§4**, առաջադրանք **6**):

Համեմատի՛ր հետևյալ կոտորակները

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{10}{10} = 1:$$

Խնդիրն այն է, որ չորրորդ դասարանի աշակերտները դեռ չեն ծանոթացել կոտորակների համեմատման գործընթացին, սակայն արդեն կարողանում են տրված կոտորակից անցնել այլ հայտարարով կոտորակների: Առաջանում է հետազոտական խնդիր, որը առավել հարմար է լուծել ամբողջ դասարանի ջանքերով: Ուսուցիչը կարող է կիրառել այստեղ նույնիսկ խնդրահարույց իրավիճակների ստեղծման տեխնոլոգիան:

Ուսուցման բոլոր ժամանակակից մանկավարժական տեխնոլոգիաներն ունեն ընդհանուր բնութագրիչներ: Չուտ կազմակերպչական տեսանկյունից դա խորային աշխատանքն է: Վաղուց հայտնի է, որ աշակերտները հասկանում են իրար ավելի լավ, քան ուսուցչին: Այդ երևույթն առավել արդյունավետ օգտագործելու մեթոդիկան ենթադրում է խմբի բոլոր անդամների ակտիվ մասնակցություն ուսուցման գործընթացին, քանի որ ասպարեզ է գալիս աշակերտների փոխադարձ կախվածության գործոնը: Խմբի աշակերտի վաստակած գնահատականը տրվում է խմբի բոլոր անդամներին, ուստի յուրաքանչյուր անդամ շահագրգռված է լավագույնս յուրացնել խմբին տրված հանձնարարության բովանդակությունը և դրա իրականացումը: Իհարկե, ոմանք կարող են ասել, որ դա հակասում է մարդու իրավունքներին: Սակայն եթե երեխան գնում է դպրոց (պետական), ապա դրանով իսկ նրա վրա դրվում է դասարանի շահերը պաշտպանելու պարտականությունը: Դա ենթադրում է ուսումնական գործընթացի արդյունավետ իրականացման պարտականությունը: Ցավոք, մեր կրտսեր դպրոցի ուսուցիչները պատշաճ ուշադրություն չեն դարձնում այդ պայմանին (ավելի ճիշտ՝ դիդակտիկայի պետականության սկզբունքին) և աշակերտների մեծամասնությունը կարծում է, որ կարող են սովորել կամ չսովորել: Նրանք չեն մտածում, որ պետությունը մեծ գումարներ է ծախսում դպրոցի շենքը շահագործելու, ուսուցիչների վարձատրելու, կահույք, տեխնիկական միջոցներ և այլ գույք ապահովելու համար: Դրան համապատասխան աշակերտը պետք է անթերի կատարի իր պարտականությունները և մասնավորապես լիարժեք յուրացնի ուսումնական դասընթացները:

Ուսուցման ժամանակակից մանկավարժական տեխնոլոգիաների ակնարկ տրվել է մաթեմատիկայի մեր երկրորդ դասարանի դասագրքի մեթոդական ուղեցույցում: Դրանցից պարզագույնը խաղային տեխնոլոգիան է:

### **Խմբային աշխատանքը ուսուցման ժամանակակից մանկավարժական տեխնոլոգիաներում**

Խմբային աշխատանքի առանձնահատկությունն այն է, որ այն առկա է ուսուցման բոլոր ժամանակակից տեխնոլոգիաներում: Դա նշանակում է, որ դրա նկարագիրը օգտակար է այդ տեխնոլոգիաներով աշխատող ուսուցիչների համար: Ուսուցիչը աշակերտներին տարանջատում է մի քանի խմբի (սովորաբար երեք - չորս): Այդ գործընթացը կազմակերպվում է դասից առաջ՝ դպրոցի հոգեբանի հետ համատեղ: Այստեղ կարևոր է աշակերտների բնավորությունների համատեղելիության գործոնը: Խմբերի կազմը մշտապես փոփոխվում է: Անընդունելի է, որ նույն կազմով խումբը մի քանի անգամ մասնակցի ուսումնական գործընթացին: Աշակերտները պետք է սովորեն աշխատել փոփոխվող պայմաններում: Անփոփոխ կազմերով խմբերում ձևավորվում է առանձին կազմավորման հոգեբանություն և որոշակի մրցակցություն մնացած խմբերի նկատմամբ: Դա իր հերթին խմբի ներսում սկսում է ձևավորել մշտական առաջատարների և մշտական հետ մնացողների մթնոլորտ: Սակայն խմբերի կազմավորման հիմնական նպատակներից մեկը խմբի աշակերտների զարգացումը և մաթեմատիկայից ուժեղացումն է: Յուրաքանչյուր խմբում պետք է լինեն բարձր առաջադիմությամբ երկու - երեք աշակերտ, հնարամիտ երեք - չորս աշակերտ և մի քանի համեմատաբար ցածր առաջադիմությամբ երեք - չորս աշակերտ: Բարձր առաջադիմությամբ աշակերտները կատարում են տեղեկատվության աղբյուրի դեր: Նրանք պարզաբանում են խորին տրված հանձնարարության բովանդակությունը, բացատրում են, թե ինչ է պահանջվում կատարել: Հնարամիտները առաջարկում են հանձնարարության կատարման եղանակներ, որից հետո խումբը անցնում է աշխատանքի: Իհարկե, շատ դեպքերում հնարավոր է, որ խմբի առաջատարները բավական հնարամիտ են և կարող են առաջարկել կատարման եղանակներ: Սակայն այստեղ նրանք պետք է սահմանափակվեն խորհրդատուների դերով և խառնվեն միայն այն դեպքում, եթե խմբի մնացած

անդամները չեն կարողանում առաջարկել կատարման ավագույն եղանակ: Եթե օգտագործվում է խնդրահարույց իրավիճակների ստեղծման տեխնոլոգիան, ապա խմբի բոլոր անդամները պետք է հայտնեն իրենց կարծիքը և խորհրդատուները ընտրում են լավագույն տարբերակը: Հանձնարարության կատարման գործընթացը բոլոր մանրամասներով և բացատրություններով ներկայացնում են առաջատարները: Նրանք պատասխանում են նաև խմբի մյուս անդամների հարցերին: Խմբի բոլոր անդամները պետք է լիարժեք հասկանան հանձնարարության բովանդակությունը և դրա կատարման գործընթացը: Բանն այն է, որ խմբի աշխատանքի արդյունքները ներկայացվում են ուսուցչին և ուսուցիչը կարող է հրավիրել խմբի ցանկացած անդամի գրատախտակի առջև ներկայացնելու խմբի առաջարկած գործընթացը: Այլ խմբերի անդամները այդ ընթացքում կարող են նրան տալ հարցեր և ներկայացնել դիտողություններ: Անհրաժեշտ է դրանց պատասխանել: Այդ աշակերտի գնահատականը տրվում է իր խմբի բոլոր անդամներին: Այս հանգամանք ուժեղ հոգեբանական ճնշում է բոլոր աշակերտների վրա: Աշակերտները սկսում են հասկանալ, որ նրանք պետք է լիարժեք յուրացնեն դասարանում ուսումնասիրված նյութը և լինեն պարտաճանաչ տնային հանձնարարություններ կատարելիս: Միայն այդ դեպքում նրանք ի վիճակի կլինեն խմբի աշխատանքի ժամանակ լիարժեք մասնակցել այդ գործընթացին: Եթե աշակերտը թերանում է ամենօրյա ուսումնական գործընթացում, ապա ամենալավ աշակերտը չի կարողանա մի քանի րոպեի ընթացքում պարզաբանել նրան հանձնարարության կատարման գործընթացը և ապահովել նաև համադասարանցիների հարցերին պատասխանելու կարողությունը: Անշուշտ, ոմանք կասեն, որ սա բավական դաժան, ոչ մարդասիրական եղանակ է: Մյուս կողմից, այն արտակարգ արդյունավետ է: Եթե ուսուցիչը պարբերաբար կիրառում է խմբային մեթոդը, ապա դասարանի աշակերտների առաջադիմությունը սկսում է բարձրանալ: Ավելացնենք, որ խմբերին կարող է տրվել նույն հանձնարարությունը, սակայն դրանք կարող են լինել նաև տարբեր: Մնում է ավելացնել, որ հանձնարարությունները պետք է լինեն բարդության նույն մակարդակի՝ անցանկալի է, որ մի խոբին տրվի բարդ, իսկ մյուսներին՝ ավելի պարզ հանձնարարություն: Բացի այդ, եթե մի խմբից գրատախտակի առջև հրավիրվել է, ասենք, թույլ աշակերտ, ապա մյուս խոբերից աշխատանքի արդյունքների ներկայացումը պետք է կատարեն նույն առաջադիմությամբ աշակերտներ: Ինչպես տեսնում ենք չորրորդ դասարանի մաթեմատիկայի դասընթացը ընդգրկում է բավական մեծ ծավալի ուսումնական նյութ: Մյուս կողմից ուսուցման ժամանակակից մանկավարժական տեխնոլոգիաների ակտիվ կիրառումը (խմբային աշխատանքը դրանց հիմնական բաղադրիչներից է) բարձրացնում է աշակերտների առաջադիմությունը և ուսուցչի մասնագիտական որակները:

### **Գրականության ցանկ**

- 1. Հարությունյան Ս.,** Մաթեմատիկա **4**, դասագիրք հանրակրթական դպրոցի **4**-րդ դասարանի համար, Երևան, Անտարես, **2025**
- 2. Հարությունյան Ս.,** Մաթեմատիկա **2**, մեթոդական ուղեցույց, Երևան, Աստղիկ գրատուն, **2023**
- 3. Հարությունյան Ս.,** Մաթեմատիկա **4**, մեթոդական ուղեցույց, Երևան, Անտարես, **2025**
- 4. Comensky J. A.,** La Grande didactique ou l'art universel de tout enseigner à tous (**1627-1632**), trad. de Marie-Françoise Bosquet-Frigout, Dominique Saget, Bernard Jolibert. 2 e éd. revue et corrigée, Klincksieck, **2002**. (Philosophie de l'éducation ; 9) (**ISBN 2-252-03407-6**)

## ԽՄԲԱՅԻՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 4 ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ

### Սամվել Քրիստափորի Հարությունյան

#### Խ. Աբովյանի անվան Հայկական պետական մանկավարժական համալսարան

**Ամփոփում:** Սույն հոդվածը նվիրված է ուսուցման ժամանակակից մանկավարժական տեխնոլոգիաների գլխավոր բաղադրիչներից մեկին: Ուսման առաջին տարվանից սկսած՝ սովորողների խմբային աշխատանքը կարևոր դեր է կատարում ուսուցման գործընթացում: Այդ աշխատանքի ներմոծումը կրտսեր դպրոցում նպաստում է սովորողների զանազան հոտությունների զարգացմանը՝ հմտություններ, որոնք անհրաժեշտ են մաթեմատիկայի և այլ ուսումնական առարկաների լիարժեք ուսումնասիրման համար: Բացի այդ, այն զարգացնում է սովորողների հաղորդակցական, հետազոտական, ստեղծագործական ընդունակությունները: Այդ աշխատանքի բովանդակության մեջ ուսումնական մանկավարժական հոգեբանական սոցիալական և այլ բաղադրիչների կենտրոնացումը ձևափոխում է այն կրտսեր դպրոցում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի չափազանց արդյունավետ գործիքի: Հոդվածի առաջին մասում տրված են առաջադրանքների օրինակներ, որոնք անհրաժեշտ է կատարել ուսուցման ժամանակակից մանկավարժական տեխնոլոգիաների կիրառմամբ: Յուրաքանչյուր տեխնոլոգիայի անհատական առանձնահատկությունները ազդում են խմբային աշխատանքի արարողության վրա: Այդ աշխատանքի կիրառությունը ուսուցման տարբեր տեխնոլոգիաներում դրան ավելացնում է որոշ յուրահատկություններ: Մյուս կողմից, ուսուցիչները պետք է կիրառեն դրանք զգուշությամբ՝ երեք - չորս խումբ, 7-8 սովորող դրանցից յուրաքանչյուրում, կարևոր է ամեն անգամ փոխել խմբի կազմը: Այդ տեխնոլոգիաների (որտեղ խմբային աշխատանքը հիմնական բաղադրիչներից է) ներդրումը ուսուցման գործընթացում նպաստում է մաթեմատիկա ուսումնասիրելիս սովորողների առաջադիմության բարձրացմանը: Մյուս կողմից, ուսուցիչը բարձրացնում է իր մասնագիտական մակարդակը:

**Բանալի բառեր:** Ուսուցման ժամանակակից մանկավարժական տեխնոլոգիաներ, խմբային աշխատանք, մաթեմատիկայի չորրորդ դասարանի դասընթաց:

## ГРУППОВАЯ РАБОТА В КУРСЕ МАТЕМАТИКА 4

### Самвел Христофорович Арутюнян

#### Армянский государственный педагогический университет им Х. Абовяна

**Резюме.** Настоящая статья посвящена одной из главных практических составляющих современных педагогических технологий обучения. Групповая работа учащихся играет важную роль в процессе обучения математике с первого года учебы. Внедрение этой работы в младшей школе способствует развитию различных умений учащихся, необходимых для успешного изучения математики и других дисциплин. Кроме того, она развивает коммуникативные, исследовательские, творческие способности учащихся. Концентрация учебных, педагогических, психологических, социальных и других составляющих в содержании этой работы преобразует ее в очень результативный инструмент в процессе обучения математике в младшей школе. В первой части статьи приведены примеры заданий, которые необходимо выполнить с применением современных педагогических технологий обучения. Индивидуальные особенности каждой технологии обучения влияют на процедуру групповой работы. Применение этой работы в

различных технологиях обучения добавляет к ней некоторые специфические черты. С другой стороны, учителям следует применять их осторожно: три-четыре группы, 7-8 учащихся в каждой из них, важно каждый раз менять состав. Внедрение этих технологий (где групповая работа является одной из основных составляющих) в учебный процесс способствует повышению успеваемости учащихся при изучении математики. С другой стороны, учитель повышает свой профессиональный уровень.

**Ключевые слова.** Современные педагогические технологии обучения, групповая работа, курс математики четвертого класса.

## **GROUP ACTIVITY IN THE COURSE MATHEMATICS 4**

**Samvel Kristapori Haroutunian**

**Kh. Abovyan Armenian state pedagogical university**

**Summary:** The present article to one of main practical components of the modern pedagogical teaching technologies is devoted. The group activity of pupils plays an important role in the process of Mathematics instruction since the first year of study. Introduction of this activity in primary school stimulate the development of different abilities of pupils necessary for the successful study of Mathematics and other disciplines. Besides, it develops communicative, researching, creative abilities of children. Concentration of learning, pedagogical, psychological, social and other components in the content of this activity transforms it in a very effective instrument in the process of the Mathematics instruction in the primary school. In the first part of the present article, some examples of the problems necessary to study with application of modern teaching technologies are presented. Individual properties of each teaching technology affects directly on the procedure of the group activity. Application of this activity in different teaching technologies adds to it some specific features. Other side the teachers must apply this activity carefully: three – four groups, 7-8 pupils in each group, it is important to change the staff every times. Implementation of these technologies (where the group activity is one of essential components) in the teaching process stimulates the progress of pupils in studying Mathematics. Other side the teacher develops his (or her) professional level.

**Key words:** Modern pedagogical teaching technologies, group activity, mathematics course of the year 4.

**Получено в редакцию - 08.05.2025**

**Рецензирована – 05.06.2025**

**Отправлен на сайт – 12.06.2025**

ԿՈՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴԸ ԵՐԿՐԱԶՎՓԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Պետրոսյան Լեոնիկ Նահապետի

ORCID 0000-0002-9587-1428

ՀԱՊՀ Կապանի մասնաճյուղ



Պետրոսյան Լ. Ն., մանկավարժական  
գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր

Ներածություն

Երկրաչափության մեջ կիրառվում են խնդիրների լուծման տարբեր մեթոդներ. **համադրական (մաքուր երկրաչափական), ձևափոխությունների, վեկտորական, կոորդինատային** և այլն: Դպրոցական դասընթացում նրանք զբաղեցնում են տարբեր դիրքեր: Ավանդաբար, հիմնական մեթոդ համարվում է համադրականը, իսկ մյուսներից՝ առավել բարձր դիրք է զբաղում կոորդինատային մեթոդը, քանզի այն խիստ կապված է հանրահաշվի հետ: Համադրական մեթոդի նրբագեղությանը կարելի է հասնել ինտուիցիայի, կռահման, լրացուցիչ կառուցումների օգնությամբ: Կոորդինատային մեթոդը դրանք խստորեն չի պահանջում. խնդիրների լուծումը մեծամասամբ հաշվեկարգված (ալգորիթացված) է, որը շատ դեպքերում պարզեցնում է խնդրի լուծման որոնումը և դրա լուծումը: Կարելի է վստահորեն ասել, որ տվյալ մեթոդի ուսումնասիրումը երկրաչափության դպրոցական դասընթացի անբաժանելի մասը է:

Սակայն չի կարելի մոռանալ, որ կոորդինատային մեթոդով խնդիրներ լուծելիս անհրաժեշտ են հանրահաշվական հաշվարկների կիրառման պահանջվող հմտություններ և կարծես պետք չէ դատողականության բարձր աստիճան: Այս մտածելակերպը իր հերթին կարող է բացասաբար ազդել սովորողների ստեղծագործական ունակությունների զարգացման վրա: Այդ պատճառով անհրաժեշտ է կոորդինատային մեթոդի ուսումնասիրման և օգտագործման այնպիսի

մեթոդիկա, որը թույլ կտա դպրոցականներին սովորելու կոորդինատային մեթոդով լուծել տարբեր, երբեմն նաև սովորողներին համեմատաբար քիչ ծանոթ, ավելի բարդ, խնդիրներ: Պատահական չէ, որ շատ երկրաչափական խնդիրներ, որոնց լուծումը համադրական մեթոդով շատ դժվար է, կոորդինատային մեթոդով դրանց լուծումը ստացվում է ավելի պարզ ու նրբագեղ:

### **Հոդվածի հիմնական բովանդակությունը**

Երկրաչափության զարգացման մեջ մեծ դեր է խաղացել հանրահաշվի կիրառումը երկրաչափական կառույցների ուսումնասիրման գործում, որի հիմքի վրա հետագայում որպես մաթեմատիկայի առանձին ճյուղ՝ ձևավորվեց անալիտիկ երկրաչափությունը:

Անալիտիկ երկրաչափության առաջացումը կապված է նրա, հիմնական գործիք հանդիսացող, կոորդինատային մեթոդի հայտնագործման հետ: Կոորդինատային մեթոդը, բացի հարթության մեջ տրված օբյեկտներին առնչվող մի շարք խնդիրների լուծման նպատակահարմարությունից, հանդիսանում է նաև տարածական օբյեկտների միջև ցանկացած հեռավորությունների և անկյունների որոշման բավականին արդյունավետ մեթոդ:

Կոորդինատային մեթոդով այս կամ այն մաթեմատիկական կամ ֆիզիկական խնդիրներ լուծելիս կարելի է օգտագործել տարբեր կոորդինատային համակարգեր՝ դրանցից ընտրելով այն, որում խնդիրը, կոնկրետ տվյալ դեպքում, լուծվում է հարմար ու հեշտ:

Գոյություն ունեն մի շարք կոորդինատային համակարգեր՝ ուղղանկյուն, բևեռային, պարաբոլային, կոնական, պրոյեկտիվ, գնդային, գլանային և այլն: Դրանցից առավել օտագործվողը ուղղանկյուն կամ, ինչպես ասում են, դեկարտյան կոորդինատային համակարգն է, որից էլ հիմնականում օգտվում են դպրոցական մաթեմատիկայում:

Երկրաչափության դպրոցական դասընթացում որոշակիորեն անդրադարձ կատարվում է կոորդինատային մեթոդին: Մասնավորապես նշենք հայ հեղինակներ Ս. Է. Հակոբյանի ([2, էջ 77-84]) հեղինակած հանրակրթական ավագ դպրոցի ընդհանուր և հումանիտար հոսքի 11-րդ դասարանի և Լ. Ս. Աթանեսյան և ուրիշներ ([1, էջ 53-64]) հանրակրթական ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 11-րդ դասարանի դասագիրքերը, ինչպես նաև ռուս հեղինակներ Ա. Վ. Պոգորելովի [3, էջ 120-132] և Ի. Ֆ. Շարիգինի [5, էջ 396-410] դասագրքերը:

Նշված դասագրքերը, լուսաբանելով կոորդինատային մեթոդի էությունը և սովորողներին որոշակիորեն ծանոթացնելով նրա հիմնական հասկացություններին ու օգտագործվող բանաձևերին, այնուամենայնիվ չեն լուսաբանում և ուսուցանում այն հիմնական մեթոդները, որոնք օգտագործվում են այդ մեթոդով երկրաչափական խնդիրները լուծելիս:

Սովորաբար կոորդինատային մեթոդով խնդիրների լուծումը տեղի է ունենում ըստ հաշվեկարգի, որն իր հերթին ավելի դյուրին է դարձնում խնդրի լուծման որոնումը կամ կռահումը և դրա լուծումը: Տվյալ մեթոդը դեպի երկրաչափություն է տեղափոխում հանրահաշվի կարևոր առանձնահատկություններից մեկը՝ այս կամ այն խնդրի լուծման եղանակների միաձևությունը: Երկրաչափության խնդիրների լուծման նպատակով կոորդինատային մեթոդի կիրառումը ազատում է բարդ տարածական պատկերների ներկայացման անհրաժեշտությունից:

Որպես խնդիրների լուծման մեթոդի՝ կոորդինատային մեթոդի էությունը կայանում է նրանում, որ պատկերները տալով հավասարումներով և տաբեր երկրաչափական առնչությունները արտահայտելով կոորդինատներով՝ հնարավորություն է ստեղծվում երկրաչափական խնդիրը լուծել հանրահաշվական միջոցներով:

Կոորդինատային մեթոդը համընդհանուր մեթոդ է: Այն ապահովում է սերտ կապը հանրահաշվի և երկրաչափության միջև, որոնք միավորվելով տալիս են «հարուստ պտուղներ», ինչպիսին չէին կարող տալ՝ մնալով անջատված: Որոշ դեպքերում կոորդինատային մեթոդը

հնարավորություն է տալիս կառուցել ապացույցներ և ավելի ռացիոնալ լուծել խնդիրներ, որի դեպքում դրանք շատ ավելի գեղեցիկ ու նրբագեղ են, քան մաքուր երկրաչափական լուծումները:

Երկրաչափության խնդիրներում կոորդինատային մեթոդի կիրառումը որոշ դեպքերում կապված է մի երկրաչափական դժվարության հետ. միևնույն խնդիրը ստանում է տարբեր անալիտիկ ներկայացումներ՝ կախված այս կամ այն կոորդինատային համակարգի ընտրությունից: Եվ միայն բավարար փորձն է թույլ տալիս ընտրելու ավելի նպատակահարմար կոորդինատային համակարգ:

Այժմ որոշակիորեն անդրադառնանք կոորդինատային մեթոդով խնդիրների լուծման ալգորիթմին:

Այս մեթոդի օգնությամբ հիմնականում լուծվում են երկու տիպի խնդիրներ:

**I.** Օգտվելով կոորդինատային մեթոդից՝ երկրաչափորեն մեկնաբանել հավասարումները ու անհավասարությունները և դրանով իսկ երկրաչափությունը կիրառել հանրահաշվի և անալիզի նկատմամբ: Փունկցիայի գրաֆիկական պատկերումը կոորդինատային մեթոդի այդպիսի առաջին կիրառությունն է:

**II.** Պատկերները տալով հավասարումներով և կոորդինատներով արտահայտելով երկրաչափական առնչությունները՝ մենք հանրահաշիվը կիրառում ենք երկրաչափության նկատմամբ: Օրինակ, կարելի է կոորդինատներով արտահայտել հիմնական երկրաչափական մեծությունը՝ կետերի միջև եղած հեռավորությունը:

Կոորդինատային մեթոդով, ինչպես հանրահաշվական, այնպես էլ երկրաչափական խնդիրների լուծումը, ըստ էության հանգեցվում է **որոշակի ալգորիթմի** կատարման, որպես կանոն՝ բաղկացած հետևյալ քայլերից.

- Ելնելով կոորդինատների հարմարության նկատառումներից՝ խնդիրը բերել համապատասխան կոորդինատային (անալիտիկ) լեզվի:

- Կատարել անալիտիկ արտահայտության ձևափոխություն:

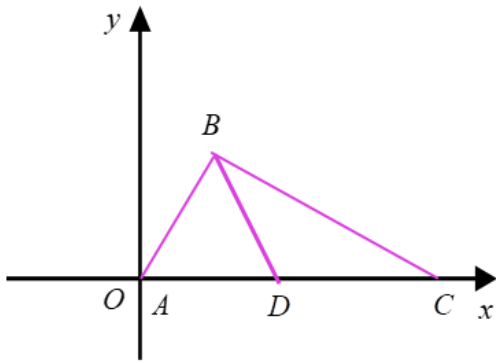
- Կատարել հակառակ անցում, այսինքն՝ կոորդինատական լեզվից անցնել այն լեզվին, որի տերմիններով ձևակերպվել էր խնդիրը:

**Օրինակ 1:**  $ABC$  եռանկյան մեջ.  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $BD$ -ն՝ միջնագիծն է: Ապացուցել,

$$\text{որ } BD^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}:$$

**Քայլ առաջին:** Կոորդինատային համակարգն ընտրենք այնպես, որ  $A$  կետը ծառայի կոորդինատների սկզբնակետ, իսկ  $AC$  ուղիղը՝  $Ox$  առանցք (նկ. 1):

Կարևոր է օպտիմալ կերպով ընտրել կոորդինատական համակարգը, այսինքն՝ այնպես, որ առավել պարզ գտնվեն տրված կետերի կոորդինատները:



Ն.Լ.

Ընտրված կոորդինատական համակարգում  $A$ ,  $C$  և  $D$  կետերն ունեն հետևյալ կոորդինատները.  $A(0,0)$ ,  $D(b/2,0)$  և  $C(b,0)$ :

**Քայլ երկրորդ:** Նշանակենք  $B$  կետի կոորդինատները  $x$ -ով և  $y$ -ով: Այդ դեպքում օգտագործելով կոորդինատներով տրված երկու կետերի միջև եղած հեռավորության բանաձևը՝ կստանանք.

$$\begin{cases} c^2 = x^2 + y^2, \\ a^2 = (x-b)^2 + y^2 : \end{cases} \quad (1)$$

Այդ նույն բանաձևով՝

$$BD^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 : \quad (2)$$

Լուծելով (1) հավասարումների համակարգը՝ գտնում ենք  $x$ -ը և  $y$ -ը.

$$x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}; \quad y = \sqrt{c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2}} :$$

Ստացված արդյունքները տեղադրելով (2) բանաձևի մեջ՝ ստանում ենք.

$$BD^2 = \left(\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} - \frac{b}{2}\right)^2 + c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2} : \quad (3)$$

Ստացված արտահայտության մեջ կատարելով համապատասխան ձևափոխություններ՝ վերջնականապես ստանում ենք.

$$BD^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} : \quad (4)$$

**Օրինակ 2:** Տրված են երկու կետեր, որոնց հեռավորությունը հավասար է  $a$ : Գտնել կետերի բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի համար տրված երկու կետերից եղած հեռավորությունները հավասար են:

**Քայլ առաջին:** Նշանակենք կետերը  $A$ -ով և  $B$ -ով: Ներածենք ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը, որի սկզբնակետը  $A$  կետն է. (ձևավորվում է կոորդինատական օպտիմալ համակարգ ընտրելու կարողությունը): Այստեղից հետևում է, որ  $AB = a$ : Այդ դեպքում տվյալ կոորդինատական համակարգում կետերն ունեն հետևյալ կոորդինատները.  $A(0,0)$  և  $B(a,0)$ : Նշանակենք կամայական կետ այնպես, որ տեղի ունենա հետևյալ պայմանը.  $AM = MB$ :  $M$  կետն ունի  $M(x,y)$  կոորդինատները: Օգտագործելով այդ կետերի հեռավորության կոորդինատներով արտահայտված բանաձևը՝ ստանում ենք

$$AM^2 = x^2 + y^2, \quad MB^2 = (x-a)^2 + y^2 : \quad (5)$$

(5)-ի հաշվառմամբ,  $AM = MB$  պայմանից ստանում ենք

$$x^2 + y^2 = (x-a)^2 + y^2, \quad (6)$$

**Քայլ երկրորդ:** Կատարելով ստացված (6) արտահայտության ձևափոխություններ՝ արդյունքում կստանանք.  $x = a/2$ :

**Քայլ երրորդ:** Կատարենք հակառակ ձևափոխություն հավասարման լեզվից երկրաչափական լեզու: Ստացված  $x = a/2$  հավասարումն ուղղի հավասարում է, որն զուգահեռ է  $Oy$  առանցքին և կանգնած է  $A$  կետից  $d = a/2$  հեռավորության վրա, այսինքն՝ հանդիսանում է  $AB$  հատվածի միջնուղղահայ:

**Օրինակ 3:**  $A(4;1)$  և  $B(11;8)$  կետերով տանել շրջանագիծ, որը շոշափում է  $Ox$  առանցքը:

**Քայլ առաջին:** Նախ նշենք, որ կենտրոնի  $(a;b)$  կոորդինատներ և  $r$  ունեցող շրջանագծի հավասարումը հետևյալն է՝ ( $[4, էջ 14]$ )

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2: \quad (7)$$

Ակնհայտ է, որ որոնվող շրջանագիծն ընկած է  $Ox$  առանցքից վերև և, քանի որ դրա հետ միասին այն շոշափում է  $Ox$  առանցքը, հետևաբար նրա կենտրոնի օրդինատը հավասար է շրջանագծի շառավղին՝  $b = r$ : Այդ պատճառով որոնվող շրջանագծի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$(x-a)^2 + (y-r)^2 = r^2 \text{ կամ } (x-a)^2 + y^2 - 2ry = 0: \quad (8)$$

**Քայլ երկրորդ:** (8) Հավասարման մեջ հերթականորեն տեղադրելով  $A$  և  $B$  կետերի կոորդինատները՝ կստանանք հետևյալ հավասարումները՝

$$\begin{cases} (4-a)^2 + 1 - 2r = 0, \\ (11-a)^2 + 64 - 16r = 0: \end{cases} \quad (9)$$

(9)-ի լուծումից ստանում ենք՝  $a_1 = 7$ ,  $a_2 = -1$ ,  $b_1 = r_1 = 5$ ,  $b_2 = r_2 = 13$ :

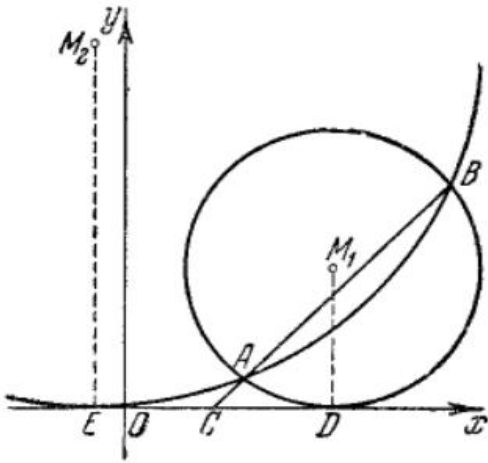
**Քայլ երրորդ:** Հետևաբար, գոյություն ունեն խնդրի պայմանին բավարարող

$$(x-7)^2 + (y-5)^2 = 25 \text{ և } (x+1)^2 + (y-13)^2 = 169 \quad (10)$$

հավասարումներով որոշվող երկու շրջանագծեր, որոնք ներկայացված են (նկ. 2) - ում:

Նշենք, որ առաջարկվող ալգորիթմով և վերը դիտարկված տիպի խնդիրներով կոորդինատային մեթոդը չի սահմանափակվում: Դպրոցում մաթեմատիկայի խորացված կամ նախասիրական ուսուցման դեպքում կան լայն սպեկտրի շատ ավելի հետաքրքիր, որոշակի առումով նաև ավելի բարդ խնդիրներ, որոնք լուծելիս անպայմանորեն չի ենթադրվում, որ պետք է կիրառել վերը բերված ալգորիթմը: Այս դեպքում կոորդինատային մեթոդի շրջանակներում կիրառվում են նաև այլ եղանակներ և օգտագործվում որոշ թեորեմներ: Այս առումով դիտարկենք մի շարք խնդիրներ, որոնց լուծման մեթոդները և ստացված արդյունքները էականորեն կհարստացնեն մաթեմատիկայով (առանձնապես երկրաչափությամբ) հետաքրքրվող սովորողների գիտելիքները և կնպաստեն նրանց հետաքրքրության մեծացմանը մաթեմատիկայի, մասնավորապես նաև երկրաչափության, նկատմամբ:

Դիցուք՝ հարթության վրա տրված է կոորդինատային համակարգը: Ասում են, որ  $M$  **բազմությունը տրված է**  $x, y$  անհայտներով **հավասարմամբ**, եթե այդ բազմությունը կազմված է միայն և միայն այն  $(x, y)$  կետերից, որոնց կոորդինատները բավարարում են տրված հավասարմանը: Դրանով իսկ,  $f(x, y) = 0$  հավասարմանը համապատասխանեցվում է «նկար» կոորդինատային հարթության վրա:



Ն

հավասարումամբ՝

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \text{ կամ } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0: \quad (11)$$

Իրոք,  $M$  կետն ընկած է  $r$  շառավղով  $P(x_0, y_0)$  կենտրոնով շրջանագծի վրա միայն և միայն այն դեպքում, երբ  $M$  կետից միջև  $P$  կենտրոն հեռավորությունը հավասար է նրա շառավղին.  $MP = r$  :

Օգտագործելով հարթության վրա երկու կետերի հեռավորության բանաձևը, ստանում ենք հետևյալ հավասարումը՝

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r, \text{ կամ } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0: \quad (12)$$

$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$  (որտեղ  $a \neq 0$ ) տեսքի քառակուսային հավասարումները միշտ տալիս են կամ շրջանագիծ, կամ կետ, կամ էլ լուծում չունեն։ Վերձենք, օրինակ, հետևյալ հավասարումը՝

$$2(x^2 + y^2) + 16x - 4y + d = 0: \quad (13)$$

Մի փոքր ձևափոխենք այս հավասարումը կատանանք.

$$x^2 + y^2 + 8x - 2y + \frac{d}{2}, \text{ կամ } x^2 + 8x + y^2 - 2y + \frac{d}{2} = 0: \quad (14)$$

(14) -ի որոշ ձևափոխությունից հետո ստանում ենք՝

$$(x^2 + 8x + 16) - 16 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + \frac{d}{2} = 0, \quad (15)$$

Ստացված հավասարումից քառակուսի անջատելով՝ վերնականապես կունենանք.

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 + \frac{d}{2} - 17 = 0: \quad (16)$$

(16) հավասարումից կարող ենք անել հետևյալն դատողությունները.

- $\frac{d}{2} - 17 < 0$  դեպքում ստացվում է շրջանագիծ, որի կենտրոնը  $(-4; 1)$  կետն է,
- $\frac{d}{2} - 17 = 0$  դեպքում ունենք մեկ կետ այն է՝  $(-4; 1)$  կետը,

- $\frac{d}{2} - 17 > 0$  դեպքում կունենանք լուծումների դատարկ բազմություն:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ընդունված է  $y = ax^2 + bx + c$  (որտեղ  $a \neq 0$ ) քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկն անվանել պարաբոլ: Սակայն, եթե այդ գրաֆիկը շրջենք որևէ անկյունով կամ էլ արտապատկերենք ինչ-որ առանցքի նկատմամբ, ապա ստացված բազմությունը չի դադարի պարաբոլ լինելուց: Օրինակ,  $x - y^2 = 0$  հավասարումը տալիս է պարաբոլ, որի առանցք համընկնում է  $Ox$  առանցքի հետ: Ավելի լավ է պարաբոլը սահմանել երկրաչափորեն (որպես տրված կետից և տրված ուղղից հավասարահեռ կետերի բազմություն):

Հաջորդ ակտումը ընդհանրապես դժվար չէ (փորձեք ապացուցել ինքնուրույն), սակայն կարևոր է, քանի որը ցույց է տալիս կապը բազմությունների նկատմամբ կատարվող ձևափոխությունների և հավասարումների նկատմամբ կատարվող ձևափոխությունների միջև:

**Թեորեմ 1:** *Դիցուք՝  $A$  բազմությունը տրված է  $f(x, y) = 0$  հավասարմամբ, իսկ  $B$  բազմությունը՝  $g(x, y) = 0$  հավասարմամբ: Այդ դեպքում  $f(x, y)g(x, y) = 0$  հավասարումը տալիս է այդ բազմությունների  $A \cup B$  միավորումը, իսկ*

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

*համակարգը տալիս է դրանց հատումը:*

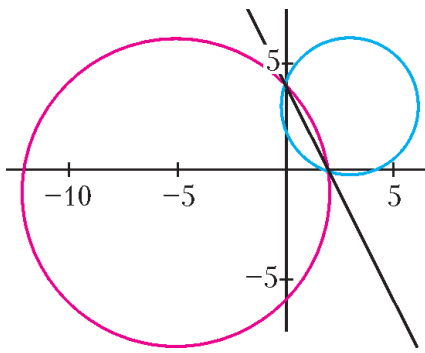
Որոշ մասնագետներ գտնում են, որ այս թեորեմը կարելի է անվանել «անալիտիկ երկրաչափության հիմնական թեորեմ»: Իրականում, աշխատելով բազմությունների հավասարումների հետ, հաճախ ենք օգտվում (նույնիսկ դա չնկատելով) թեորեմ 1-ից: Օրինակ, քանի որ  $(x-1)^2 - 4y^2 = (x-1-2y)(x-1+2y)$ , ապա  $(x-1)^2 = 4y^2$  հավասարումը տալիս է  $y = \frac{x-1}{2}$  և  $y = -\frac{x-1}{2}$  ուղիղների (գույգի) միավորումը: Իսկ այդ ուղիղների հատումները 2 շառավղով և կոորդինատների սկզբնակետում գտնվող կենտրոնով շրջանագծի հետ կարելի է գտնել՝ լուծելով

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 4y^2, \\ x^2 + y^2 = 4: \end{cases} \quad (18)$$

համակարգը:

Ներկայացնենք թեորեմ 1-ի կիրառությամբ խնդիր, որի լուծումը բավական նրբագեղ է, առանց ավելորդ հաշվումների:

**Խնդիր 1:** *Գտնել  $O_1(3;3)$  կենտրոնով ու  $r_1 = \sqrt{10}$  շառավղով և  $O_2(-5;-1)$  կենտրոնով ու  $r_2 = 5\sqrt{2}$  շառավղով շրջանագծերի հատման կետերով տարված ուղղի հավասարումը (նկ. 3):*



Ն.11

Փորձենք գնալ ստանդարտ ճանապարհով: Անհրաժեշտ է գրել տրված շրջանագծերից յուրաքանչյուրի հավասարումը, գտնել նրանց հատման կետերը, լուծել երկու փոփոխականով երկու հավասարումներով համակարգը, իսկ այնուհետև գրել գտնված կետերով անցնող ուղղի հավասարումը:

Գրենք տրված շրջանագծերի հավասարումները: Նրանցից առաջինը տրվում է հետևյալ հավասարմամբ՝

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 10,$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 10,$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0:$$

(19)

Երկրորդ շրջանագծի հավասարումը հետևյալն է՝

$$(x+5)^2 + (y+1)^2 = 50,$$

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = 50, \quad (20)$$

$$x^2 + y^2 + 10x + 2y - 24 = 0:$$

Այսպիսով, այդ շրջանագծերի հատման կետերի կոորդինատները հանդիսանում են հետևյալ համակարգի լուծումները՝

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0, \\ x^2 + y^2 + 10x + 2y - 24 = 0: \end{cases} \quad (21)$$

(21)-ի երկրորդ հավասարումից հանելով առաջինը և ստացված հավասարումը նորից (21)-ի առաջին հավասարման հետ գրելով՝ կստանանք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0, \\ 16x + 8y - 32 = 0: \end{cases}$$

կամ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0, \\ 2x + y - 4 = 0: \end{cases} \quad (22)$$

(22)-ի երկրորդ հավասարումից  $y$ -ը արտահայտելով  $x$ -ով՝ ստանում ենք՝  $y = 4 - 2x$ : Այս արտահայտությունը, տեղադրելով համակարգի առաջին հավասարման մեջ, կստանանք այդ շրջանագծերի հատման կետերի արժեքների համար հետևյալ հավասարումը՝

$$x^2 + (4 - 2x)^2 - 6x - 6(4 - 2x) + 8 = 0$$

կամ՝

$$5x^2 - 10x = 0, \quad (23)$$

որտեղից՝  $x = 0$ ; 2: Եթե  $x = 0$ , ապա  $y = 4$ , իսկ եթե  $x = 2$ , ապա  $y = 0$ : Այսպիսով, շրջանագծերի հատման կետեր են հանդիսանում  $A(0; 4)$  և  $B(2; 0)$  կետերը: Հետևաբար,  $AB$  ուղղի  $y = kx + b$  հավասարման մեջ կստանանք  $k = -2$  և  $b = 4$ : Այսպիսով, որոնվող ուղիղը տրվում է հետևյալ հավասարմամբ՝

$$y = 4 - 2x: \quad (24)$$

Բայց կարծես մենք տեսել ենք այս հավասարումը: Այն ճիշտ և ճիշտ (22) համակարգի երկրորդ հավասարումն է: Հնարավոր է, հարկ չկա՞ր լուծելու այդ համակարգը: Փորձենք տրամաբանական տեսանկյունից վերլուծել կատարված գործողությունները: Ստացանք  $2x + y - 4 = 0$  հավասարումը՝ որպես (21) համակարգի հետևանք: Նշանակում է, երկու բազմությունների (շրջանագծերի) բոլոր ընդհանուր կետերը, որոնք տրված են (21) համակարգի հավասարումներով, ընկած են այդ ուղղի վրա:

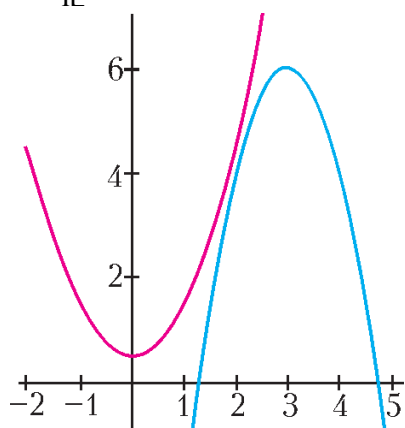
Փորձենք ընդհանրացնել պնդումները, որոնք օգտգործվել են բերված դաստողություններում:

**Թեորեմ 2:** Դիցուք՝  $A$  բազմությունը տրված է  $f(x, y) = 0$  հավասարմամբ, իսկ  $B$  բազմությունը՝  $g(x, y) = 0$  հավասարմամբ: Եթե  $A$  և  $B$  բազմություններն ունեն ընդհանուր կետեր, ապա կամայական  $a$  և  $b$  թվերի համար  $af(x, y) + bg(x, y) = 0$  հավասարումը տալիս է բազմություն, որն իր մեջ պարունակում է այդ բազմությունների հատման բոլոր կետերը:

Իրոք, դիցուք՝  $M(x_0; y_0)$ -ն  $A$  և  $B$  բազմությունների ինչոր ընդհանուր կետ է: Հետևաբար,  $f(x_0, y_0) = 0$  և  $g(x_0, y_0) = 0$ , այդ պատճառով նաև  $af(x_0, y_0) + bg(x_0, y_0) = 0$ , որը և նշանակում է, որ  $M$  կետն ընկած է  $af(x, y) + bg(x, y) = 0$  հավասարմամբ տրվող բազմության մեջ:

**Խնդիր 2:** Գտնել  $y = x^2 + 1/2$  և  $y = -2x^2 + 12x - 12$  պարաբոլները միմյանցից բաժանող ինչոր ուղղի հավասարում (նկ. 4):

Այս դեպքում բավական է գտնել ուղիղ, որը չի հատում տրված երկու պարաբոլներից և ոչ մեկը:



Իրոք, դիցուք երկու պարաբոլների հավասարումների ավագ գործակիցներն ունեն տարբեր նշաններ: Այդ դեպքում, եթե ուղիղը չի հատում այդ պարաբոլները ոչ մեկը, ապա այն անպայման բաժանում է նրանց, այսինքն՝ պարաբոլները դասավորվում են ուղղի տարբեր կողմերում (ապացուցեք այդ):

Նորից սկսենք խնդրի լուծման «ճակատային» ճանապարհից:

Կարելի է ստուգել, որ տրված պարաբոլները չեն հատվում:

Իրոք,

$$x^2 + \frac{1}{2} = -2x^2 + 12x - 12 \text{ կամ } 6x^2 - 24x + 25 = 0$$

հավասարումը, լուծում չունի, քանի որ հավասարման տարբերիչը՝

$$\Delta = 576 - 600 = 24 < 0:$$

Մեզ անհրաժեշտ է գտնել  $y = kx + b$  հավասարման գործակիցները, որի դեպքում այդ ուղիղը չի հատում տրված պարաբոլներից և ոչ մեկը:  $kx + b = x^2 + \frac{1}{2}$  հավասարումը լուծումներին չի

խանգարում, եթե  $k^2 + 4b - 2 < 0$ , կամ  $b < \frac{2 - k^2}{4}$ :  $kx + b = -2x^2 + 12x - 12$  հավասարումն ունի

լուծումներ, եթե  $(k - 12)^2 - 8(b + 12) < 0$ , կամ  $b > \frac{1}{8}(k - 12)^2 - 12$ :

$$\begin{cases} b < \frac{2-k^2}{4}, \\ b > \frac{1}{8}(k-12)^2 - 12 \end{cases} \quad (25)$$

Համակարգի ինչ որ լուծում գտնելու համար սկզբում բավարար է գտնել  $k$ -ն, որը հանդիսանում է

$$\frac{1}{8}(k-12)^2 - 12 < \frac{2-k^2}{4}, \text{ կամ } (k-12)^2 - 96 < 4 - 2k^2, \text{ կամ } 3k^2 - 24k + 44 < 0$$

անահավասարության լուծում:

Այժմ փորձենք դատել այլ կերպ: Պարզ է, որ եթե

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

համակարգը լուծում չունի, որեմն լուծում չունի նաև

$$\begin{cases} f(x, y) + g(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{և} \quad \begin{cases} f(x, y) + g(x, y) = 0, \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

համակարգերից և ոչ մեկը: Եթե վերձենենք

$$f(x, y) = 2y - 2x^2 - 1 \quad \text{և} \quad g(x, y) = y + 2x^2 - 12x + 12,$$

ապա կունենանք

$$f(x, y) + g(x, y) = 3y - 12x + 11:$$

Այդ պատճառով

$$3y - 12x + 11 = 0 \quad \text{կամ} \quad y = 4x - \frac{11}{3} \quad (26)$$

հավասարմամբ տրված ուղիղը չի հատի տրված պարաբոլներից ոչ մեկը:

Թերեմ 2-ին համանման ձևակերպենք թերեմ 3-ը, որը համդիսանում է այն պնդման ընդհանրացումը, որի վրա հիմնված էր խնդիր 2-ի լուծումը:

**Թերեմ 3:** *Դիցուք՝  $A$  բազմությունը տրված է  $f(x, y) = 0$ , իսկ  $B$  բազմությունը՝  $g(x, y) = 0$  հավասարմամբ: Եթե  $A$  և  $B$  բազմությունները ընդհանուր կետ չունեն, ապա զրոյից տարբեր կամայական  $a$  և  $b$  թվերի համար  $af(x, y) + bg(x, y) = 0$  հավասարումը տալիս է բազմություն, որն ընդհանուր կետ չունի  $A$  և  $B$  բազմությունների հետ:*

Ենթադրենք, թե  $af(x, y) + bg(x, y) = 0$  հավասարմամբ տրված բազմությունն ունի ընդհանուր կետեր, օրինակ,  $A$  բազմության հետ: Նշանակենք  $(x_0, y_0)$ -ով այդպիսի կետերից մեկի կոորդինատները: Այդ դեպքում, քանի որ  $f(x_0, y_0) = 0$  և  $af(x_0, y_0) + bg(x_0, y_0) = 0$ , ապա  $bg(x_0, y_0) = 0$ : Քանի որ ըստ պայմանի  $b \neq 0$ , հետևաբար  $g(x_0, y_0) = 0$ : Դրանով իսկ  $(x_0, y_0)$  կոորդինատներով կետն ընկած է  $B$  բազմությունում, որը հակասում է նրան, որ, ըստ պայմանի,  $A$  և  $B$  բազմություններն ընդհանուր կետ չունեն:

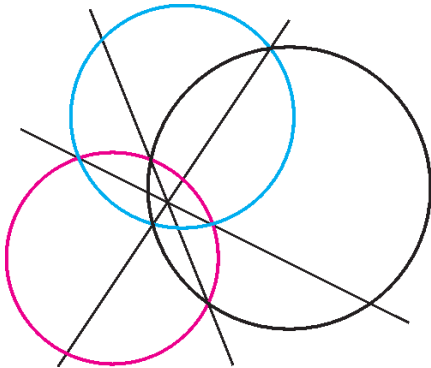
Փորձենք վերը դիտարկված գաղափարները կիրառել այսպես կոչված «ոչ հաշվարկային» լուծումներում:

**Խնդիր 3:** *Դիցուք հարթության վրա տրված են երեք՝ զույգ առ զույգ հաստիղ, շրջանագծեր, որոնց կենտրոններն ընկած չեն մեկ ուղղի վրա: Այդ շրջանագծերից յուրաքանչյուր զույգի համար դիտարկենք*

նրանց հատման կետերով տարված ուղիղը (նկ. 5): Ապացուցել, որ այդ ուղիղներն անցնում են մեկ կետով:

Նշված շրջանագծերից յուրաքանչյուրը տրվում է  $f_i(x, y) = 0$  հավասարմամբ, որտեղ

$$f_i(x, y) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2, \quad i = 1, 2, 3: \quad (27)$$



1.1. 5

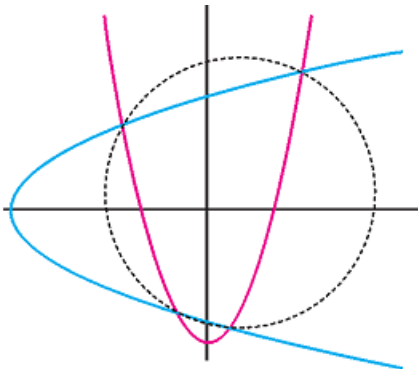
Ինչպես խնդրի 1-ի լուծման մեջ տեսանք, տրված շրջանագծերի հատման կետերով անցնող  $\ell_{12}$ ,  $\ell_{13}$  և  $\ell_{23}$  ուղիղները տրվում են համապատասխանաբար  $f_1(x, y) = f_2(x, y)$ ,  $f_1(x, y) = f_3(x, y)$  և  $f_3(x, y) = f_2(x, y)$  հավասարումներով:

Դիցուք՝  $M(x_0, y_0)$ -ն  $\ell_{12}$  և  $\ell_{13}$  ուղիղների (խնդրի պայմանից հետևում է, որ այդ ուղիղները զուգահեռ չեն) հատման կետն է: Քանի որ  $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0)$  և  $f_1(x_0, y_0) = f_3(x_0, y_0)$ , ուստի  $f_2(x_0, y_0) = f_3(x_0, y_0)$ : Այսպիսով,  $M$  կետն ընկած է նաև  $\ell_{23}$  ուղիղ վրա, որը և նշանակում է, որ բոլոր այդ ուղիղներն անցնում են մեկ

կետով:

Ինչպես տեսնում ենք, դատողությունը բավականին նրբագեղ է:

**Խնդիր 4:** Դիտարկենք հարթության վրա գտնվող երկու պարաբոլներ, որոնք հատվում են չորս կետերում: Ապացուցել, որ եթե պարաբոլների համաչափության առանցքներն փոխուղղահայաց են, ապա այդ պարաբոլների հատման կետերն ընկած են մի շրջանագծի վրա (նկ. 6):



1.1.

Ներածենք կոորդինատների համակարգը՝ որպես առանցքներ վերցնելով տրված պարաբոլների համաչափության առանցքները: Կոորդինատների այդ համակարգում պարաբոլները տրվում են հետևյալ հավասարումներով՝

$$y = ax^2 + y_0 \text{ և } x = by^2 + x_0: \quad (28)$$

(28)-ի հավասարումներից առաջինը բազմապատկելով  $b$ -ով, իսկ երկրորդը՝  $a$ -ով և այնուհետև գումարելով ստացված հավասարումները՝ կստանաք՝

$$by + ax = ab(x^2 + y^2) + ax_0 + by_0$$

կամ

$$x^2 + y^2 - \frac{x}{b} - \frac{y}{a} + \frac{x_0}{b} + \frac{y_0}{a} = 0: \quad (29)$$

(29) հավասարումը տալիս է շրջանագիծ, որը, համաձայն թեորեմ 2-ի, անցնում է տրված պարաբոլների հատման բոլոր կետերով:

### Եզրակացություն

Վերոբերյալ դիտարկումը հիմք է տալիս եզրակացնելու, որ կոորդինատային մեթոդի օգնությամբ կարելի է անալիտիկ լուծմամբ, առանց ծավալուն գծագրական կառույցների ներկայացնել ամենատարբեր, այդ թվում նաև համեմատաբար դժվար երակրաչափական խնդիրների լուծումներ, որը մեծապես օգնում է հարստացնելու և ամբողջական դարձնելու

սովորողների գիտելիքները երկրաչափությունից, ինչպես նաև նպաստում է նրանց հետաքրքրության աճին «Երկրաչափություն» առարկայի նկատմամբ:

Կոորդինատային մեթոդով երկրաչափական խնդիրները ներկայացնելու և լուծելու համար անհրաժեշտ է մշակել համապատասխան մեթոդիկա կամ մեթոդական քայլեր:

Դպրոցի երկրաչափության դասընթացում (ինչպես նաև նախասիրական պարապմունքներում) կոորդինատային մեթոդի օգտագործման համար նախ անհրաժեշտ է առանձնացնել կորկրետ այն թեմաները, որտեղ կարելի է և անհրաժեշտ է ներառել այդ մեթոդի օգտագործումը:

Սույն հոդվածում ներկայացվեցին կոորդինատային մեթոդի կիրառությունները հարթության վրա դիտարկվող խնդիրներում: Միաժամանակ հարկ ենք համարում նշել, որ դրանով նշված մեթոդի կիրառությունները չեն սահմանափակվում: Կոորդինատային մեթոդն իր լայն կիրառություններն ունի նաև ստերեոմետրական (տարածաչափական) խնդիրներում, որին անդրադարձ չի կատարվել հոդվածի ծավալային նկատառումներից ելնելով:

### **Գրականության ցանկ**

1. **Հակոբյան Ս. Է.:** Երկրաչափություն: Դասագիրք հանրակրթական ավագ դպրոցի ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի 11-րդ դասարանի համար: Եր.: Տիգրան Մեծ, 2010.- 136 էջ:
2. **Աթանեսյան Լ. Ս.,** Բուտոզով Վ. Ֆ. և այլք: Երկրաչափություն-11: Հանրակրթական ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 11-րդ դասարանի դասագիրք: Եր.: «Զանգակ», 2014.- 136 էջ:
3. **Погорелов А. В. Геометрия:** Учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений. - 5-е изд. - М: Просвещение, 1995. - 383 с.
4. **Смогоржевский А. С.** Метод КООРДИНАТ. Гос. издательство технико-теоретической литературы. Москва, 1952. - 40 с.
5. **Шарыгин И. Ф. Геометрия.** 7-9 кл.: Учеб. общеобразовательных. Дрофа, 2012.-462 с.

## **ԿՈՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴԸ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ Պետրոսյան Լեռնիկ Նահապետի**

**Ամփոփում:** Հոդվածում վեր են հանված կոորդինատային մեթոդով երկրաչափական խնդիրների լուծման հնարավորությունները: Երկրաչափության մեջ կոորդինատային մեթոդի էությունն այն է, որ անմիջականորեն կետերի կոորդինատներով երկրաչափական օբյեկտները տրվում են անալիտիկորեն՝ թվերի, հավասարումների, անհավասարումների կամ դրանց համակարգերի օգնությամբ, և դրանով իսկ օգտագործում են անալիտիկ մեթոդներ, թեորեմներ ապացուցելիս կամ երկրաչափական խնդիրներ լուծելիս : Դա էականորեն պարզեցնում է դատողությունները և հաճախ թույլ է տալիս, օգտվելով որոշակի հաշվեկարգից (ալգորիթից), ապացուցել թեորեմներ կամ լուծել խնդիրներ, կատարել այս կամ այն հաշվարկները այն դեպքում, երբ ավանդաբար օգտագործվող զուտ երկրաչափական (համադրական) մեթոդը շատ դեպքերում պահանջում է արհեստական հնարքների կիրառում: Համընդհանուր ուսումնական գործողությունների տիրապետման պահանջը ներկայումս ներառված է նաև գործող կրթական չափորոշիչներում և օգտագործվող առարկայական ծրագրերում:

Երկրաչափական խնդիրներում կոորդինատային մեթոդի կիրառումը լայն հարավորություններ է բացում լուծելու դպրոցական երկրաչափության ավանդական դասընթացում գրեթե չդիտարկվող, սակայն իրենց օգտակարությամբ բավականին արժեքավոր խնդիրներ, որոնք մեծ հաջողությամբ կարելի է քննարկել մաթեմատիկայի խորացված ուսուցման հոսքերում կամ նախասիրական պարապմունքներում: Այս առումով, ներկայացված են կոնկրետ թեորեմներ և մի շարք ուսանելի խնդիրների օրինակներ, որոնք հիմնավորում են կոորդինատային մեթոդի կարևորությունը և կիրառման անհրաժեշտությունը հանրակրթական դպրոցում:

**Բանալի բառեր:** Կոորդինատային մեթոդ, երկրաչափական խնդիրներ, կոորդինատային համակարգ, հաշվեկարգ, բազմություն, թեորեմ:

## МЕТОД КООРДИНАТ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Лерник Наапетович Петросян

НПУА Капанский филиал Аннотация

**Резюме.** В статье выявлены возможности решения геометрических задач методом координат. Сущность метода координат в геометрии заключается в том, что по непосредственным точкам координат геометрические объекты даются аналитически, т.е. посредством цифр, уравнений и неравенств или их систем и, тем самым, при доказательстве теорем или решении геометрических задач используются аналитические методы. Это существенно упрощает суждения и часто позволяет, пользуясь определенным алгоритмом, доказывать теоремы или решать задачи, делать те или иные расчеты в том случае, когда традиционно используемый собственно геометрический (сопоставительный) метод во многих случаях требует использование искусственных приемов. Требование владеть всеобщими учебными действиями в настоящее время включено также в действующие образовательные стандарты и используемые предметные программы.

Применение метода координат в решении геометрических задач открывает широкие возможности для решения задач, не включенных в традиционный курс школьной геометрии однако достаточно ценных своей полезностью, которые с большим успехом можно рассматривать в потоках с углубленным обучением математике или в любительских курсах. В этой связи представлены конкретные теоремы и ряд примеров учебных задач, которые обосновывают важность и необходимость применения метода координат в средней школе.

**Ключевые слова.** Метод координат, геометрические задачи, система координат, алгоритм, множество, теорема.

## COORDINATE METHOD IN GEOMETRIC TASKS

Lernik Nahapet Petrosyan

NPUA Kapan branch

**Summary:** The article reveals the possibilities of solving geometric tasks by means of the coordinate method. The essence of the coordinate method in geometry is that, based on direct coordinate points, geometric objects are given analytically, i.e. by means of numbers, equations and inequalities or their systems, and thus, analytical methods are used to prove theorems or solve geometric tasks. This significantly simplifies judgments and often allows, using a certain algorithm, to prove theorems or solve tasks, make certain calculations in the case when the traditionally used geometric (comparative) method in many cases requires the use of artificial techniques. Currently the requirement to master general educational actions is also included in the current educational standards and used subject programs.

The use of the coordinate method in solving geometric tasks opens the wide opportunities for solving tasks not included in the traditional course of school geometry, but quite valuable in their usefulness, which can be considered to be of great success in groups with advanced training in mathematics or in amateur courses. In this regard particular theorems and a number of examples of study tasks are presented, substantiating the importance and necessity of applying the coordinate method in the secondary school.

**Keywords:** Coordinate method, geometric tasks, coordinate system, algorithm, multiplicity, theorem.

*Получено в редакцию - 05.03.2025*

*Рецензирована – 07.05.2025*

*Отправлен на сайт – 12.06.2025*

**ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ԳՐԱՖԻԿԱԿԱՆ  
ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ԿԻՐԱԴՌՈՒՄԸ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ  
ԼՈՒԾՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ**

**Գյուլնարա Սողոմոնի Աղամյան**  
**Կապանի Անդրանիկ Մարգարյանի անվան թիվ 7 հիմնական դպրոց**



**Գյուլնարա Աղամյան, մաթեմատիկայի  
և ինֆորմատիկայի ուսուցչորհի**

***Ներածություն***

Հայտնի է, որ պարամետրական խնդիրներ թեման դպրոցականներից շատերի համար մնում է դժվարամարս: Ներկայացվող աշխատանքում առաջարկում եմ պարամետրական հավասարումների դասավանդումը կատարել ալգորիթմների գրաֆիկական ներկայացման՝ բլոկ-սխեմաների միջոցով, պարամետրական հավասարումների լուծումը ներկայացնելու եղանակով, որով ակնառու և հնարավորինս մատչելի է դառնում թե՛ պարամետր հասկացության ընկալումը, և թե՛ պարամետրերի հետ աշխատանքի դժվարությունները:

Ինֆորմատիկայի դասընթացում ուսումնական տարբեր առարկաներից խնդիրների լուծումը որևէ ծրագրային միջավայրում, սովորողներին հնարավորություն է տալիս ոչ միայն լավ յուրացնել տվյալ համակարգչային ծրագիրը, այլ նաև ավելի լավ հասկանալ այս կամ այն առարկայի ուսումնական նյութը: Այն հնարավորություն է տալիս զարգացնել աշակերտի մտածողությունը և խնդրին համապատասխան՝ սեփական հետազոտություն անցկացնելու կարողությունը: Այդ իսկ պատճառով ինձ մոտ մտահղացում առաջացավ տվյալ հանգամանքը օգտագործել պարամետրական հավասարումների լուծման դասավանդման ժամանակ:

Քանի որ, արդեն իսկ հանրահաշվի դասընթացում ներմուծված է ալգորիթմական մտածողությունը, դա գործը բավականին հեշտացնում է: Չէ որ բլոկ-սխեման ալգորիթմի ներկայացման գրաֆիկական միջոց է, որը կարևորվում է իր ակնառությամբ: Հենց դա էր պատճառը, որ ես կարևորեցի դրանց օգտագործումը, քանի որ ինֆորմացիայի 90%-ը յուրացվում է տեսողական ընկալմամբ:

Ինֆորմատիկայի դպրոցական դասընթացում ալգորիթմների գրաֆիկական ներկայացումները՝ բլոկ-սխեմաները, ուսումնասիրվում են որպես խիստ կառուցվածքներ, որոնք կառուցված են վերջավոր թվով մեկընդմիջտ ֆիքսած բլոկների հավաքածուից ընտրված որոշակի բլոկներից, ուստի հանրահաշվի դասընթացում նպատակահարմար է սխեմաները կառուցել նույն ձևով [2, էջ 44]:

**Բանալի բառեր:** մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթաց, ալգորիթմի գրաֆիկական ներկայացում, պարամետրական հավասարում:

## **Ալգորիթմների գրաֆիկական ներկայացման կիառումը պարամետրական հավասարումների լուծման ժամանակ**

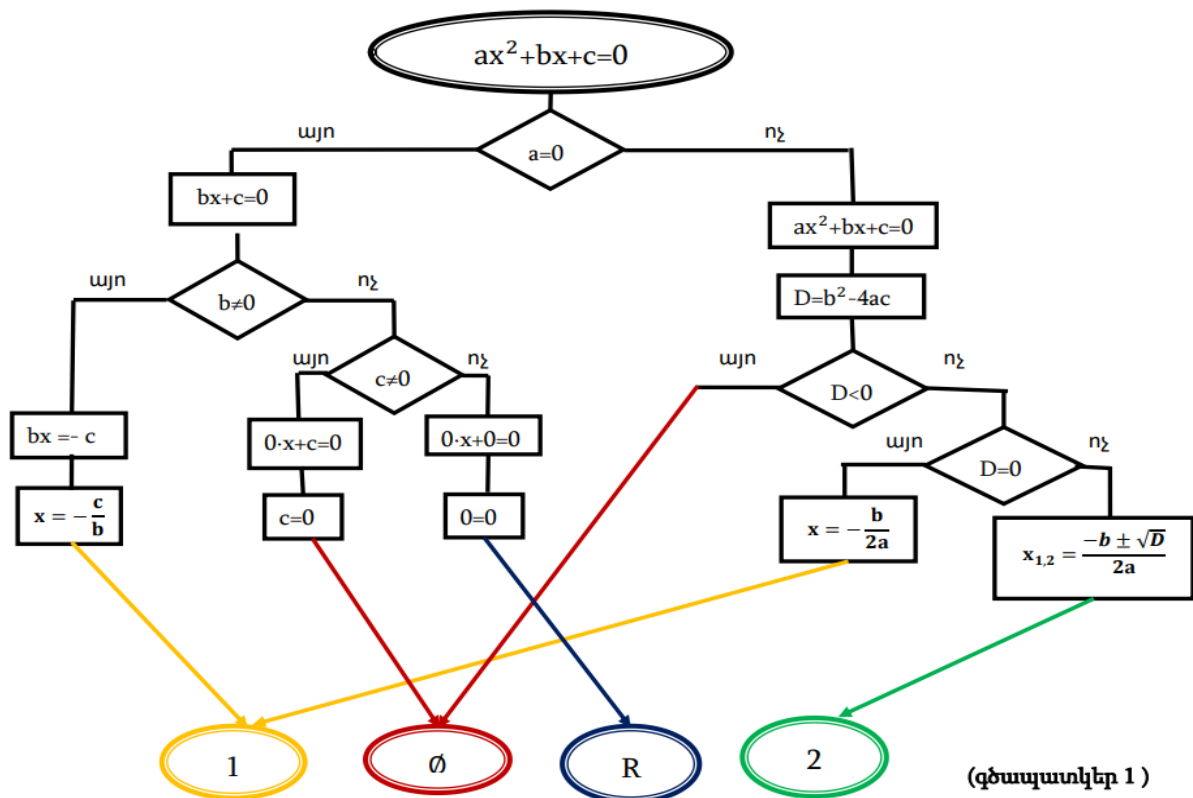
Խնդրի լուծման ժամանակ առաջնային նշանակություն պետք է տալ մոդելավորմանը, որովհետև մոդելը ներկայանալով քննարկվող օբյեկտի հատկություններով, կարող է բավականին ճշգրիտ ներկայացնել նրա վարքը: Ցանկալի արդյունքի հասնելու համար անհրաժեշտ է բլոկ սխեման ստեղծել երեխաների հետ միասին՝ համատեղ ուժերով, ոչ թե մատուցել պատրաստի:

Նախ պետք է հանգամանալից բացատրել, թե ինչ ասել է պարամետր և հատուկ ուշադրություն դարձնել անհայտ փոփոխականի և պարամետրի տարբերության մանրամասն բացատրության վրա: Այսինքն երեխան պետք է հասկանա, որ անհայտը դա որոնվող այն թիվն է, որը բանաձևը դարձնում է ճիշտ, իսկ պարամետրերը անհայտի հետ բանաձևում մասնակցող, ըստ էության հայտնի թվեր են, որոնք ներկայացված են տառերի միջոցով: Ուղղակի երբ կոնկրետ թիվ ենք օգտագործում, մենք ունենում ենք մի դեպքի լուծում, իսկ պարամետրերի՝ տառերի, պարագայում մենք գործ ենք ունենում նույնօրինակ լուծում պահանջող անթիվ դեպքերի հետ միաժամանակ՝ ներքուստ ընկալելով պարամետրերի փոփոխվող արժեքները: Այդ փոփոխվող արժեքների հետ կապված հարկավոր է առանձնացնել գործողությունների այն շարքը, որի կատարումը առաջ է բերում պարամետրի արժեքները սահմանափակող պայմաններ:

Պարամետրի հետ աշխատելիս, վերը նշված սահմանափակումների հետ կապված քննարկվելու են պայմաններ, իսկ մենք գիտենք, որ պայմանը տրամաբանական արտահայտություն է, որը կարող է ընդունել ճիշտ կամ կեղծ արժեքներից որևէ մեկը: Ճիշտ է, եթե ստուգվող պայմանը տեղի ունի, և կեղծ՝ հակառակ դեպքում: Հետևաբար օգտագործելու ենք ճյուղավորված ալգորիթմներ: Ուստի հարկ է մի համարում հիշեցնել, որ բլոկ-սխեմաներում պայման ստուգելու նպատակով կիրառվում է շեղանկյունը: Եթե բլոկում ներառված պայմանը իրական է ապա գործողությունների հետագա ընթացքը շարունակվում է այդ ճյուղով, հակառակ դեպքում՝ ոչ ճյուղով: **(Տես 2՝ էջ 53)**

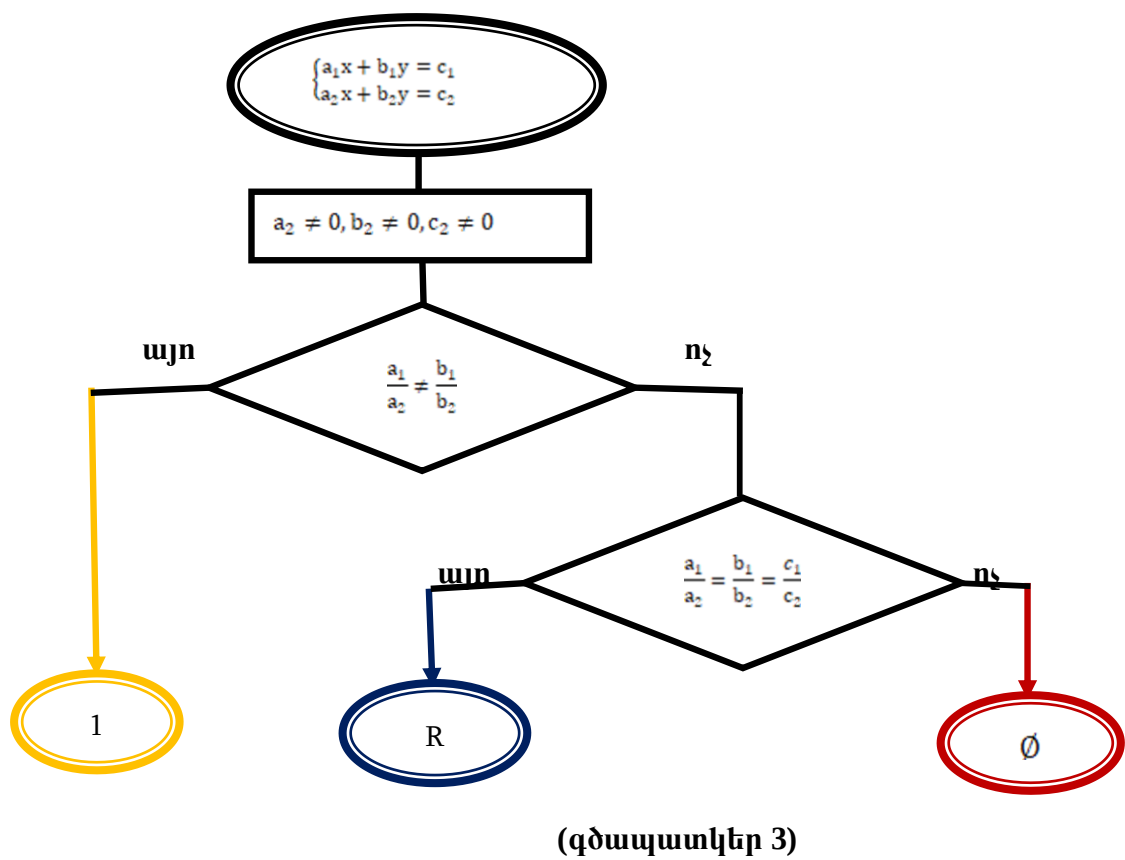
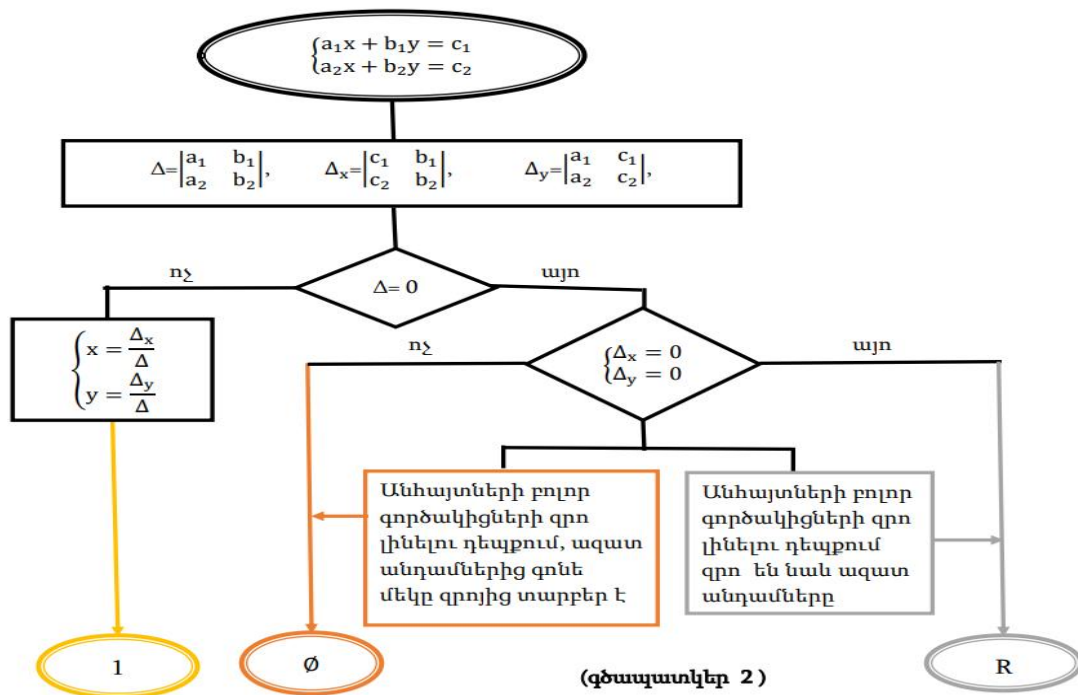
Այս աշխատանքում ներկայացնում են  $ax^2+bx+c=0$  հավասարման լուծումը՝ **(գծապատկեր 1)** և  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների համակարգի **(գծապատկեր 2)** և **(գծապատկեր 3)** լուծման բլոկ սխեմաները:

$ax^2+bx+c=0$  հավասարման լուծման գրաֆիկական ներկայացումից երեխաների համար ավելի



սկնհայտ հասկանալի է դառնում, թե ինչու ենք քառակուսային եռանդամի հետ աշխատելիս դնում  $a \neq 0$  պայմանը և այն, որ այդ հավասարման լուծման մասնավոր դեպք է հանդիսանում նաև զծային հավասարման լուծումը  $a=0$  պայմանի դեպքում: Ինչպես նաև սկնառու ընկալելի է դառնում,  $a$ -ի վրա պայմանի բացակայության ժամանակ  $ax^2+bx+c=0$  հավասարման լուծման հետ կապված քննարկման ընթացքում պետք է դիտարկվեն միաժամանակ երկու տիպի հավասարումների բոլոր հնարավոր դեպքերը:

Քանի որ կարծում եմ դպրոցում զծային հավասարումների համակարգերի լուծման Կրամերի կանոնի ուսումնասիրությունը ոչ միայն նպաստում էր բնութագրիչ հատկության ըստ էության ընկալմանը, այլև մատրիցա և դետերմինանտ հասկացությունների ընկալման ձևավորմանը դրա համար էլ (զծապատկեր 2) -ում երկու անհայտով երկու զծային հավասարումների համակարգի լուծումների քանակի վերլուծությունը կատարել եմ ըստ բնութագրիչ հատկության, որը իհարկե լիարժեք վերլուծությունն է երևույթի, իսկ (զծապատկեր 3) - ում՝ ըստ անհայտների գործակիցների հարաբերությունների հավասարության, որի միջոցով էլ այժմյան դասագրքերում իրականացվում է երկու զծային հավասարումների համակարգի լուծումների քանակի ներկայացումը:



## Օրինակների դիտարկում

Այժմ կոնկրետ օրինակների վրա կդիտարկենք արդեն պատրաստի բոլոր սխեմայի օգնությամբ բարդ պարամետրական հավասարումների լուծումը: Դիտարկված օրինակները վերցրել են 12-րդ դասարանի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի հանրահաշվի դասագրքից:

**Օրինակ 1 [1, էջ 67, վարժություն \*192] :**

**a** պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում հավասարումը արմատ չունի:

$$a) \quad (a^2 - 9)x^2 - 2(a + 3)x + 1 = 0$$

**(գծապատկեր 1)** -ում նայում ենք բոլոր-սխեմայում դատարկ բազմությամբ նշագրված էլիպսը և ճյուղերը դեպի որ պայմաններն են տանում: Տեսնում ենք, որ կամ պետք է ավագ անդամը և միջին անդամի գործակիցը միաժամանակ զրո լինեն (ազատ անդամը 0 չէ), կամ ավագ անդամի զրո չլինելու հետ միաժամանակ պետք է դիսկրիմինանտը փոքր լինի զրոյից: Կատարած հետևությունները ներկայացնում ենք հանրահաշվորեն և լուծում ստացած բանաձևը՝

$$\begin{cases} \begin{cases} a^2 - 9 \neq 0 \\ D < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 - 9 = 0 \\ a + 3 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a \neq \pm 3 \\ (a + 3)^2 - a^2 + 9 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = \pm 3 \\ a = -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; \infty) \\ 6a + 18 < 0 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \\ a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty; -3]$$

Պատասխան՝  $a \in (-\infty; -3]$

Նույն սկզբունքով լուծենք հաջորդ վարժությունները:

$$բ) \quad 9ax^2 - 3ax + 2 = 0$$

$$\begin{cases} \begin{cases} a \neq 0 \\ D < 0 \end{cases} \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a \neq 0 \\ 9a^2 - 72a < 0 \end{cases} \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a \neq 0 \\ a \in (0; 8) \end{cases} \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (0; 8) \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [0, 8)$$

Պատասխան՝  $a \in [0, 8)$

**Օրինակ 2 [1, էջ 68, վարժություն \*198]**

**a** պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում հավասարումը ունի միակ արմատ:

$$a) \quad (a^2 - 9)x^2 - 2(a + 3)x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \begin{cases} a^2 - 9 \neq 0 \\ D = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 - 9 = 0 \\ a + 3 \neq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a \neq \pm 3 \\ (a + 3)^2 - a^2 + 9 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = \pm 3 \\ a \neq -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a \neq \pm 3 \\ 6a + 18 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = \pm 3 \\ a \neq -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a \neq \pm 3 \\ a = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = \pm 3 \\ a \neq -3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in \emptyset \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3$$

Պատասխան՝  $a = 3$

$$բ) \quad 9ax^2 - 3ax + 2 = 0$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ D = 0 \\ a = 0 \\ 3a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a = 0 \\ a = 8 \\ a = 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ a \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow a = 8$$

Պատասխան՝  $a = 8$

Ինչպես նշեցի, վերը լուծված վարժությունների բարդությունը կայանում է նաև նրանում, որ երեխաները քառակուսային հավասարումը դիտարկելիս, որպես կանոն մոռանում կամ անտեսում են այն փաստը, որ գծային հավասարումը քառակուսայինի մասնավոր դեպքն է: Դասավանդման այս եղանակը կարելի է ասել բացառում է այդպիսի սխալ մոտեցումը:

Այժմ լուծենք վարժություններ **(գծապատկեր 2)** –ի կիրառությամբ:

Օրինակ 3 **[1, էջ 69, վարժություն 213]**

Գտնել  $a$  պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում

$$\begin{cases} (a-2)x + y = (a-2)^2 \\ x + (a-2)y = 1 \end{cases}$$

համակարգն ունի՝ ա) անվերջ թվով լուծումներ, բ) լուծում չունի, գ) միակ լուծում:

Գծապատկերից ելնելով նախ պետք է հաշվել հիմնական և լրացուցիչ որոշիչները, այնուհետև գտնել  $a$ -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում այդ որոշիչները զրո են, իսկ հետո՝ ըստ էլիպսների մեջ գրած պատասխաններից դուրս եկող ճյուղավորման պայմանների, կազմել համապատասխան հանրահաշվական բանաձևերը և լուծել դրանք: **(Տես 3՝ էջ 123 - 132)**

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a-2) & 1 \\ 1 & (a-2) \end{vmatrix} = a^2 - 1 = a^2 - 4a + 4 - 1 = a^2 - 4a + 3$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} (a-2)^2 & 1 \\ 1 & (a-2) \end{vmatrix} = (a-2)^3 - 1 = a^3 - 6a^2 + 12a - 8 - 1 = a^3 - 6a^2 + 12a - 9$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} (a-2) & (a-2)^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 2 - a^2 + 4a - 4 = -a^2 + 5a - 6$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \{1; 3\}$$

$$\Delta_x = 0 \Rightarrow a^3 - 6a^2 + 12a - 9 = 0 \Rightarrow (a+3)(a^2 - 3a + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ a^2 - 3a + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ a \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow a = 3$$

$$\Delta_y = 0 \Rightarrow -a^2 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \{2; 3\}$$

$$u) \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \{1; 3\} \\ a = 3 \\ a \in \{2; 3\} \end{cases} \Leftrightarrow a = 3$$

$$p) \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0 \\ \Delta_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \{1; 3\} \\ a \neq 3 \\ a \in \{2; 3\} \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$$

$$q) \Delta \neq 0 \Rightarrow a \in \{1; 3\} \Leftrightarrow a \in (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$$

Պատասխան՝ ա)  $a = 3$ , բ)  $a = 1$ , գ)  $a \in (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$ :

Հաջորդ վարժությունների լուծումը կներկայացնեմ **(գծապատկեր 3)** -ի օգնությամբ:

Օրինակ 4 **(Տես 1՝ էջ 69 վարժություն 214)**

Գտնել  $a$  պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում համակարգը ունի միակ լուծում:

$$q) \begin{cases} ax + (a - 2)y = 1 \\ 9x + ay = 4a - 7 \end{cases}$$

Նայելով գծագրին, տեսնում ենք, որ պետք համապատասխան փոփոխականների անհայտների գործակիցների հարաբերությունները հավասար չլինեն: Կազմելով այս հետևությանը համապատասխան հանրահաշվական բանաձևը, լուծում ենք այն:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \frac{a}{9} \neq \frac{a-2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a^2 - 9a + 18 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 6 \\ a \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 6 \\ a \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty; 3) \cup$$

$$(3; 6) \cup (6; \infty)$$

և քանի որ  $a = 0$  դեպքում էլ ունենում ենք.

$$\begin{cases} -2y = 1 \\ 9x = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y = 1 \\ 9x = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{-2} \\ x = \frac{-7}{9} \end{cases} \Rightarrow \text{ունի մեկ լուծումը} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Պատասխան՝ } a \in (-\infty; 3) \cup (3; 6) \cup (6; \infty)$$

Օրինակ 5 **(Տես 1՝ էջ 69 վարժություն 215)**

Գտնել  $a$  պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում համակարգը չունի լուծում:

$$q) \begin{cases} ax + (a - 2)y = 2 \\ 9x + ay = 4a - 6 \end{cases}$$

ըստ **(գծապատկեր 3)** -ի

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ 4a - 6 \neq 0 \\ \frac{a}{9} = \frac{a-2}{a} \\ \frac{a}{9} \neq \frac{a-2}{4a-6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq \frac{6}{4} \\ a^2 - 9a + 18 = 0 \\ 2a^2 - 3a - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq \frac{3}{2} \\ a \in \{3; 6\} \\ a \in \left\{-\frac{3}{2}; 3\right\} \end{cases} \Leftrightarrow a = 6$$

Պատասխան՝  $a = 6$

Օրինակ 6 **[1, էջ 189, վարժություն 894]:**

Գտնել  $a$  պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում համակարգն ունի անվերջ թվով լուծումներ:

$$ա) \begin{cases} (a - 2)x + 27y = 4,5 \\ 2x + (a + 1)y = -1 \end{cases}$$

ըստ (գծապատկեր 3) -ի

$$\begin{cases} a + 1 \neq 0 \\ \frac{a-2}{2} = \frac{27}{a+1} \\ \frac{a-2}{2} = \frac{4,5}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ a^2 - a - 2 = 54 \\ -a + 2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ a \in \{-7; 8\} \\ a = -7 \end{cases} \Leftrightarrow a = -7$$

Պատասխան՝  $a = -7$

Տեղին եմ համարում նշել, որ համակարգչային մոդելավորման տեխնոլոգիան է՛լ ավելի խորն է յուրացվում աշակերտների կողմից, հարակից առարկաների խնդիրների լուծման ժամանակ և փաստ է, որ հանրահաշվի դպրոցական դասընթացի ավգորիթմական ուղղվածությունը իր բնական շարունակությունն ու ավարտն է գտնում ինֆորմատիկայի դպրոցական դասընթացում:

## Տեղեկություններ նյութի պրակտիկ իրացման վերաբերյալ

|                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ուսուցչի անունը         | Գ. Ադամյան                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Ամիս/ամսաթիվ            | 2.10.2023թ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Առարկա                  | Հանրահաշիվ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Դասարան                 | VII <sup>Գ</sup>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Դասի տևողությունը       | 45 րոպե                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Դասի տեսակը             | Ընդհարացման և համակարգման դաս                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Թեման                   | Գծային հավասարման լուծումների քանակը                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Նպատակները              | Հանրահաշվի լեզվի բազային տարրերի ձևավորումը:<br>Կազմել գաղափար, թե որ դեպքերում հավասարումն ունի մեկ լուծում, որում չունի լուծում և որ դեպքերում ունի անվերջ քանակով լուծումներ:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Վերջնաբայություն        | Կարողանա լուծել մեկ անհայտով պարզագույն հավասարումներ, իմանա ինչ է հավասարման արմատը: Կարողանա լուծել օրինակներ գծային հավասարումների միջոցով:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| Միջառարկայական կապ      | մաթեմատիկա - ինֆորմատիկա                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| Խաչվող հասկացություններ | Պատճառ և հետևանք, օրինաչափություն, կառուցվածք և գործառույթ, համակարգ և մոդել                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Ընթացք                  | <p>1. Հաշվառում</p> <p>2. Տնային աշխատանքի ստուգում</p> <p>3. Չորս աշակերտների հանձնարարել գրատախտակին լուծել չորս տարբեր բարդության գծային հավասարումներ, որոնց հետ նույնական ձևափոխություններ և հավասարման հատկություններ կիրառելուց հետո կստանան գծային հավասարման <math>ax=b</math> տեսքը, ընդ որում նրանցից երկուսը կունենան մեկ լուծում, մյուսը անթիվ բազմությամբ, իսկ չորրորդը լուծում չի ունենա:</p> <p>4. Դա հիմք կհանդիսանա ձևակերպել գծային հավասարման լուծման ալգորիթը՝</p> <p><math>ax=b</math></p> <p>1. <math>a \neq 0, b \neq 0: x = -\frac{b}{a} \Rightarrow</math> ունի մեկ լուծում</p> <p>2. <math>a \neq 0, b = 0 \Rightarrow ax = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow</math> ունի մեկ լուծում</p> |

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                | <p>3. <math>a = 0, b \neq 0 \Rightarrow 0x = b \Rightarrow 0 = b \Rightarrow</math> լուծում չունի</p> <p>4. <math>a = 0, b = 0 \Rightarrow 0x = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow</math></p> <p><math>\Rightarrow</math> ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ</p> <p>5. Աշակերտների հետ միասին կմոդելավորենք ալգորիթներ՝ ստեղծելով բլոկ սխեման:</p> <pre> graph TD     Start([ax = b]) --&gt; D1{a = 0}     D1 -- այո --&gt; D2{b = 0}     D1 -- ոչ --&gt; D3{b = 0}     D2 -- այո --&gt; B1[0x = 0]     D2 -- ոչ --&gt; B2[ax = 0]     D3 -- այո --&gt; B3[0x = b]     D3 -- ոչ --&gt; B4[ax = b]     B1 --&gt; E1([0 = 0])     B2 --&gt; E2([x = 0])     B3 --&gt; E3([b = 0])     B4 --&gt; E4([x = a/b])     E1 --&gt; R([R])     E2 --&gt; 1([1])     E3 --&gt; Empty([∅])     E4 --&gt; 1     </pre> <p>6. Օգտվելով բլոկ սխեմայից կլուծենք վարժություններ 72-ի, 73-ի և 74-ի մի մասը</p> |
| <b>Անդրադարձ</b>               | Բանավոր մեկ անգամ ևս կրիտարկենք գծային հավասարման լուծման ալգորիթը:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>Գնահատում</b>               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Տնային հանձնարարություն</b> | Լուծել վարժություններ 72-ի, 73-ի և 74-ի մնացածը:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

## Եզրակացություն

Պարամետրական հավասարումների լուծման ժամանակ ալգորիթմների գրաֆիկական ներկայացումը ապահովում է սովորողների ակտիվությունն ու հետաքրքրությունը, կապ է հաստատում սովորողների ունեցած գիտելիքների, պատկերացումների և ուսուցանվող նոր նյութի միջև: Նպաստում է նյութի խոր ու բազմակողմանի ընկալմանը և տարբեր տիպի պարամետրական խնդիրներում կիրառելու կարողությունների և հմտությունների զարգացմանը: Այն հնարավորություն է տալիս հանրահաշվի պարամետրական հավասարումների հատկապես այն տեսակները, որոնք վերաբերում են քառակուսային և գծային տիպերին, դարձնել ավելի մատչելի և ընկալելի աշակերտների համար:

Համակարգչային մոդելավորման տեխնոլոգիան է՛լ ավելի խորն է յուրացվում աշակերտների կողմից, հարակից առարկաների խնդիրների լուծման ժամանակ: Մասնավորապես հանրահաշվի դպրոցական դասընթացի ալգորիթմական ուղղվածությունը իր բնական շարունակությունն ու ավարտն է գտնում ինֆորմատիկայի դպրոցական դասընթացում:

## Գրականության ցանկ

1. **Գ.Գ. Գևորգյան, Ա.Ա. Սահակյան** Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր. (բնագիտամաթեմատիկական հոսք) 12-րդ դասարան: Երևան Տիգրան Մեծ 2011: <https://online.fliphtml5.com/fumf/mlzv/#p=71>
2. **Ս.Ս. Ավետիսյան, Ս.Վ. Դանելիան** Ինֆորմատիկա 9-րդ դասարան Երևան Տիգրան Մեծ 2014: <https://online.fliphtml5.com/fumf/yxin/#p=1>
3. **Հ.Ս. Միքայելյան** Հանրահաշիվ 9-րդ դասարան: Երևան Էդիթ Պրինտ 2008:
4. **Գոգյան Սմբատ, Դիլանյան Վաչագան** Գ 720 Հանրահաշիվ: 7-րդ դասարանի դասագիրք / Ս. Գոգյան, Վ. Դիլանյան. - Եր.: «Մասնակցային դպրոց» ԿՀ, 2023.-
5. <https://lib.armedu.am/files/resource/files/2023-09-05/0b4780e398ad685dcfb59b697071e70b.pdf>

## ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ԳՐԱԾԻԿԱԿԱՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ Գյուլնարա Սողոմոնի Ադամյան

**Ամփոփում:** Աշխատանքը նվիրված է մաթեմատիկայի և ինֆորմատիկայի միջառարկայական կապերին: Որպես պարամետրական հավասարումների ուսուցման արդյունավետության բարձրացման գործոն, դիտարկվում են բլոկ-սխեմաները: Ցույց է տրվում, որ ավելի բարձր արդյունավետության կարելի է հասնել, եթե պարամետրական հավասարումների լուծումը իրականացվի բլոկ-սխեմաների օգնությամբ: Նկարագրվում է պարամետրական հավասարումների լուծման բլոկ-սխեմաների արդյունավետ օգտագործման ընթացքը: Կարևորվում են սովորողների ալգորիթմական մտածողության զարգացման և հանրահաշվական լեզվին տիրապետելու հիմնահարցերը: Կարևորվում է նաև սովորողների մասնակցությունը պարամետրական հավասարումների լուծման ընդհանուր ալգորիթմի ստեղծմանը, ինչպես նաև նրա բլոկ-սխեմայի կառուցմանը:

Ցույց է տրվում, որ նման մոտեցումը սովորողների մոտ ձևավորում է հետազոտելու, փորձարկելու, տարբեր գործիքակազմեր համադրելու, պատճառահետևանքային կապերը

վերլուծելու և որոշումներ կայացնելու կարողություն: Նրանց մոտ զարգանում են թիմային աշխատանքի հմտություններ, կանոնակարգված մտածողություն, իրենց և ուրիշների կարծիքներն ու փաստարկները գնահատելու ունակություններ: Մոտեցումը ուղղակիորեն նպաստում է՝ օրինաչափություններ, պատճառ և հետևանք, մեխանիզմ և կանխատեսում, համակարգեր և մոդելներ, կառուցվածք և գործառույթ խաչվող հասկացությունների ըմբռմանը և ամրապնդմանը՝ խթանելով սովորողի կողմից թվայնացման պրոցեսի հենքային ընկալումը:

Աշխատանքը կարող է օգտակար լինել՝ սովորողների համար սովորաբար դժվարամարս համարվող պարամետրական վարժությունների ուսուցումը հետաքրքիր և արդյունավետ դարձնելու նպատակով:

## **ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГОРИТМОВ ПРИ РЕШЕНИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

**Гюльнара Согомоновна Адамян**

**Капанская школа № 7**

**Резюме.** Работа посвящена межпредметным связям между математикой и информатикой. В качестве фактора повышения эффективности обучения параметрическим уравнениям рассматриваются блок-схемы. Показано, что можно достичь более высокой эффективности, если решение параметрических уравнений осуществляется с помощью блок-схем. Описан процесс эффективного использования блок-схем при решении параметрических уравнений. Особое внимание уделяется развитию алгоритмического мышления у учащихся и их способности овладевать алгебраическим языком. Также подчеркивается важность участия учащихся в создании общего алгоритма решения параметрических уравнений и соответствующей блок-схемы.

Показано, что такой подход формирует у учащихся способности к исследованию, экспериментированию, комбинированию различных инструментов, анализу причинно-следственных связей и принятию решений. У них формируются навыки командной работы, системного мышления, а также способность к оценке как собственного, так и чужого мнения и аргументации. Подход напрямую способствует пониманию и закреплению скрещивающихся понятий, таких как закономерности, причина и следствие, механизм и прогноз, системы и модели, структура и функция, тем самым способствуя глубинному восприятию процесса цифровизации.

Работа может быть полезна для организации более интересного и эффективного процесса обучения параметрическим уравнениям, которые обычно считаются трудными для восприятия.

**Ключевые слова:** процесс обучения математике, графическое представление алгоритма, параметрическое уравнение.

## APPLICATION OF GRAPHICAL REPRESENTATION OF ALGORITHMS IN SOLVING PARAMETRIC EQUATIONS

Gyulnara Soghomoni Adamyan

Kapan School No. 7 named after Andranik Margaryan

**Summary.** The work is dedicated to the interdisciplinary connections between mathematics and computer science. Block diagrams are considered as a factor for increasing the effectiveness of teaching parametric equations. It is shown that higher efficiency can be achieved if the solution of parametric equations is carried out using block diagrams. The process of effectively using block diagrams to solve parametric equations is described. The development of students' algorithmic thinking and their mastery of algebraic language are emphasized. The importance of student participation in creating a general algorithm for solving parametric equations, as well as constructing its corresponding block diagram, is also highlighted.

This approach fosters students' abilities to research, experiment, combine various tools, analyze cause-and-effect relationships, and make informed decisions. It helps them develop teamwork skills, structured thinking, and the ability to assess both their own and others' opinions and arguments. The approach directly contributes to the understanding and reinforcement of cross-cutting concepts such as patterns, cause and effect, mechanisms and prediction, systems and models, structure and function, thereby promoting a foundational understanding of the digitalization process.

The work can be useful in making the learning of parametric problems—typically considered difficult for students—more engaging and effective.

**Keywords:** mathematics learning process, graphical representation of algorithm, parametric equation.

*Получено в редакцию - 08.06.2024*

*Рецензирована – 22.12.2024*

*Отправлен на сайт – 12.06.2025*

## ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԻՋԻՆ ԴՊՐՈՑԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ

**Համլետ Սուրենի Միքայելյան**  
**Արաքսյա Տիգրանի Մկրտչյան**  
**Խաչատուր Աբովյանի անվան հայկական պետական**  
**մանկավարժական համալսարան**



*Արաքսյա Մկրտչյան*  
մանկ. գիտ.թեկնածու, դոցենտ

### Ներածություն

Ներկայումս ՀՀ հանրակրթական միջին դպրոցի ինչպես հանրահաշվի առարկայական չափորոշիչում, այնպես էլ նրա հիման վրա ստեղծված ծրագրում հավասարությունները մաթեմատիկական բանաձևերի հիմնական տեսակներն են: Թեև հաճախ դրանք բացորոշ ձևով չեն մասնակցում նշված կրթական փաստաթղթերի ձևակերպումներում, սակայն այդ փաստաթղթերի պահանջների իրականացումը հնարավոր է դառնում միայն հավասարության և հավասարման գործիքակազմի կիրառման շնորհիվ:

Չուտ տեսական մոտեցման տեսակետից կարևոր է դառնում նաև հավասարության գաղափարի հստակեցումը, մասնավորապես՝ նույնության գաղափարի հետ նրա փոխհարաբերության հարցի պարզաբանումը: Կարևոր է նաև հանրահաշվի կիրառական միջավայրի դիտարկման, նրանում առաջացած իրադրությունների մոդելավորման խնդրի լուծումը, ինչն արդեն մեծ մասամբ իրականացվում է հավասարման միջոցով, և հավասարությունը ավելի համեստ տեղ է զբաղեցնում:



**Հ.Ս. Միքայելյան.** Մանկ. գիտ. դոկտոր,  
Ֆ.մ.գ.թ., պրոֆեսոր

## **1. Հավասարությունը որպես հանրահաշվական խոսքի հիմնական բաղադրիչ**

Հավասարության գաղափարը երևան է գալիս միջին դարոցի հանրահաշվի լեզվի կառուցման ընթացքում, որպես հանրահաշվական խոսքի կարևորագույն բաղադրիչ՝ նախադասության հիմնական տեսակ: Հավասարությունների կազմման պահանջը առաջանում է, երբ մենք սկսում ենք ուսումնասիրել հանրահաշվի հիմնական օբյեկտների՝ հանրահաշվական արտահայտությունների հատկությունները: Կան չէ՞ հայրենում հոմանիշներ՝ բառեր, որոնք արտաքինով տարբեր են, բայց նույն իմաստն են արտահայտում: Հանրահաշվում այս միտումը հիմնարար նշանակություն ունի, սակայն այստեղ նման բառերը կամ արտահայտությունները ոչ թե հոմանիշներ են, այլ կոչվում են հավասար: Օրինակ, 2, 1+1, 3-1 բառերը կամ արտահայտությունները ունեն նույն իմաստը՝ նույնական են: Նույնական են նաև  $x + y$  և  $y + x$  արտահայտությունները, թեև ունեն տարբեր տեսքեր: Հայերենում դրանք կկոչվեին հոմանիշներ, իսկ մաթեմատիկայում կոչվում են հավասար: Եվ եթե հայերենում երկու բառերի հոմանիշ լինելու արձանագրումը որպես նախադասություն առանձնապես կարևոր նշանակություն չունի: Իսկ ահա հանրահաշվում արտահայտությունների հավասարությունը մաթեմատիկական լեզվի կառուցման հիմնական մոտիվներից մեկն է: Հանրահաշվում երկու արտահայտությունների հավասարությունը արձանագրվում է հավասարության նշանի միջոցով.  $x$  և  $y$  արտահայտությունների հավասարությունը գրառվում է  $x = y$  բանաձևի տեսքով:

Կանգ առնենք նաև հանրահաշվի լեզվի մի առանձնահատկության վրա: Հիմնական հարցը, որ առաջանում է հանրահաշվի լեզվում, բանաձևերի կամ հանրահաշվի նախադասությունների՝ բանաձևերի ճշմարտացիության խնդիրն է: Բնական լեզուներում նույնպես կա այդ խնդիրը, որ լուծվում է այդ լեզվից դուրս՝ փորձի կամ պրակտիկայի միջոցով: Հանրահաշվի բացառիկ լեզու է, որում նախադասությունների կամ բանաձևերի ճշմարտացիության հարցը լուծվում է իր միջոցներով: Ընդ որում այստեղ լուծումը կատարվում է երկու՝ աքսիոմատիկ և տրամաբանական ճանապարհներով: Հարցը չբարդացնելու համար կանգ առնենք միայն հանրահաշվական բանաձևերի՝ դպրոցական մաթեմատիկայի տեսակետից մեզ հետաքրքրող տեսակներից մեկի՝ հավասարությունների ճշմարտացիության խնդրի վրա: Հասկանալի է, որ հավասարությունը հանրահաշվում նշանակում է նրա աջ և ձախ մասերի նույնականացում: Այսինքն, ապացուցել հավասարությունը նշանակում է հաստատել նրա երկու մասերի նույնականացումը: Կանգ առնենք նույնականացման երկու ճանապարհների վրա, որ իրականացվում է միջին դարոցում [2-4]:

## **2. Նույնականացման առաջին ճանապարհը**

**2.1. Հավասարությունները և նրանց հիմնական հատկությունները:** Թեև գոյություն ունի հանրահաշվական արտահայտությունների կազմման հստակ ու պարզ կանոն, սակայն պարզվում է, որ միևնույն հանրահաշվական արտահայտությունը կարող է ներկայացվել տարբեր տեսքերով: Ահա այդ տարբեր տեսքերի նույնականությունը հանրահաշվում, ինչպես և թվաբանության մեջ, գրառվում է հավասարության նշանի միջոցով և ստացված բանաձևերն էլ կոչվում են հավասարություններ: Օրինակ, թվաբանության մեջ 10 և  $5 + 5$  թվաբանական արտահայտությունները նույնական են, ինչը գրառվում է  $5+5=10$  հավասարության միջոցով:  $x$  և  $y$  հանրահաշվական արտահայտությունների նույնականությունն էլ գրառվում է  $x = y$  հավասարության միջոցով:

Հանրահաշվում հավասարությունների կազմման արսիոմատիկ մեթոդում նախ կազմվում են հավասարության նշանով որոշակի բանաձևեր, որոնք համարվում են հավասարություններ: Դրանք արտահայտում են հանրահաշվական օբյեկտների նույնականացման առնագրային հատկությունները և հանրահաշվում կոչվում են արսիոմներ, իսկ հանրահաշվի դպրոցական դասընթացում՝ օրենքներ: Հանրահաշվական օբյեկտների նույնականացման մնացած հատկությունները կամ հանրահաշվի մնացած հավասարությունները բխեցվում են այդ օրենքներից տրամաբանության կանոնների հիման վրա: Բխեցման ընթացքն էլ սովորաբար կոչվում է ապացուցում կամ արտածում [1]: Յուրաքանչյուր ասվածը միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում հանրահաշվական կոտորակների ներառման օրինակի վրա [2-4]:

Հանրահաշվական արտահայտությունների նույնականությունը օժտված է հետևյալ երեք հիմնական հատկություններով կամ բավարարում է հետևյալ օրենքում նշված երեք օրենքներին:

Կամայական  $x, y, z$  արտահայտությունների համար.

Հավասարության անդրադարձելիության օրենքը՝  $x = x$  (կամայական արտահայտություն հավասար է ինքն իրեն),

Հավասարության համաչափելիության օրենքը՝ եթե  $x = y$  ապա  $y = x$  (եթե մի արտահայտություն հավասար է մյուսին, ապա այդ մյուսն էլ հավասար է էն մեկին),

Հավասարության փոխանցելիության օրենքը՝ եթե  $x = y$  և  $y = z$ , ապա  $x = z$  (եթե առաջին արտահայտությունը հավասար է երկրորդին, երկրորդը՝ երրորդին, ապա առաջինը հավասար է երրորդին):

Հավասարության համաչափելիության և փոխանցելիության օրենքներից կարելի է ստանալ հետևյալ հատկությունը:

Հատկություն 1: Միևնույն արտահայտությանը հավասար արտահայտությունները իրար հավասար են: Այսինքն՝ կամայական  $x, y, z$  արտահայտությունների համար՝ եթե  $x = z, y = z$ , ապա  $x = y$ :

Ապացուցումը: Դիցուք  $x, y, z$  արտահայտությունների համար ունենք  $x = z, y = z$ : Համաձայն հավասարությունների համաչափության օրենքի  $y = z$  հավասարությունից կստանանք  $z = y$  հավասարություն: Այժմ էլ  $x = z$  և ստացված  $z = y$  հավասարություններից, համաձայն հավասարությունների փոխանցական օրենքի, կստանանք  $x = y$ :

**2.2. Հավասարությունների գումարային հատկությունները:** Հանրահաշվական արտահայտությունների նույնականացման հարցը ավելի ակտուալ է դառնում դրանց հետ գործողություններ կատարելիս: Հասկանալի է, որ միևնույն փոփոխականների հետ գումարման, հանման, բազմապատկման, բաժանման և այլ գործողություններ կարելի է կատարել տարբեր հերթականություններով ու տարբեր կերպ: Սակայն երբեմն դրանք հանգեցնում են միևնույն արդյունքին, ինչը արտահայտվում է դրանց հավասարությունների միջոցով: Այստեղ նույնպես կան հիմնարար հատկություններ, որոնք ընդունվում են որպես օրենքներ, որոնցից էլ բխեցվում են մնացած հատկությունները:

Գումարի տեղափոխական օրենքը: Կամայական  $x, y$  արտահայտությունների համար՝  $x + y = y + x$  (գումարելիների տեղափոխումից գումարը չի փոխվում):

Գումարի գույքորդական օրենքը: Կամայական  $x, y, z$  արտահայտությունների համար՝  $x + (y + z) = (x + y) + z$ :

Քանի որ  $(x + y) + z$  և  $x + (y + z)$  արտահայտությունները նույնական կամ հավասար են դրանցից յուրաքանչյուրը ընդունվում է որպես երեք՝  $x, y, z$  արտահայտությունների գումարը՝  $x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z)$ :

Չրոյի օրենքը: Կամայական  $x$  արտահայտության համար  $x + 0 = x$ :

Հատկություն 2: Չորոն միակն է:

Ապացուցումը: Դիցուք գոյություն ունեն երկու զրոներ՝  $0_1$  և  $0_2$ , այսինքն՝ կամայական  $x$  արտահայտության համար՝  $x + 0_1 = x$  և  $x + 0_2 = x$ : Այս հավասարություններից առաջինում  $x$ -ի փոխարեն ընդունելով  $0_2$ , իսկ երկրորդում՝  $0_1$ , կստանանք՝  $0_2 + 0_1 = 0_2$  և  $0_1 + 0_2 = 0_1$ : Այս հավասարությունների ձախ մասերը հավասար են համաձայն գումարի տեղափոխական օրենքի: Հետևաբար հավասար կլինեն նաև նրանց աջ մասերը՝ համաձայն հատկություն 1-ի:

Հակադիր օրենքը: Կամայական արտահայտություն ունի հակադիր: Այսինքն, կամայական  $x$  արտահայտության համար գոյություն ունի նրա հակադիրը՝ այնպիսի  $y$  արտահայտություն, որ  $x + y = 0$ :

Հատկություն 3: Կամայական արտահայտության հակադիրը միակն է:

Ապացուցումը: Դիցուք  $x$  արտահայտությունը ունի  $y_1$  և  $y_2$  հակադիրներ: Այսինքն՝  $x + y_1 = 0$ ,  $x + y_2 = 0$ : Ունենք՝

$$y_2 = y_2 + 0 = (y_1 + x) + y_2 = y_1 + (x + y_2) = y_1 + 0 = y_1: y_2 = y_1:$$

Այսպիսով ստացանք, որ  $x$  արտահայտությունը չի կարող երկու հակադիր ունենալ: Նրա միակ հակադիրը ընդունված է նշանակել  $-x$ : Այսպիսով՝  $-x + x = 0$ :

Վերջին հավասարությունից անմիջապես ստացվում է հետևյալ հատկությունը:

Հատկություն 4: Արտահայտության հակադիրի հակադիրը այդ նույն արտահայտությունն է, այսինքն՝ կամայական  $x$  արտահայտության համար  $-(-x) = x$ :

Նկատենք, որ նկատի ունենալով սովորողների տարիքային առանձնահատկությունները և ելնելով մատչելիության դիդակտիկական սկզբունքից՝ [?] դասագրքում որպես օրենք ընդունվում է ոչ միայն հակադիր գոյությունը, այլև միակությունը:

Հավասարությունների գումարման օրենքը: Հավասարությունները կարելի է մաս առ մաս գումարել: Այսինքն, կամայական  $x, y, z, t$  արտահայտությունների համար՝ եթե  $x = y$  և  $z = t$ , ապա  $x + z = y + t$ :

Հեշտությամբ կարելի է ապացուցել որ՝

Հատկություն 5: Հավասարության երկու մասերին կարելի է գումարել միևնույն արտահայտությունը. Այսինքն՝ կամայական  $x, y, z$  արտահայտությունների համար, եթե  $x = y$ , ապա  $x + z = y + z$ :

Ապացուցումը: Դիցուք ունենք  $x = y$  հավասարությունը և  $z$  արտահայտությունը, որի համար էլ ունենք  $z = z$  հավասարությունը: Այս երկու հավասարություններից, հավասարությունների գումարման օրենքի համաձայն, կստանանք՝  $x + z = y + z$ :

Հատկություն 6: Կամայական  $x, y, z$  արտահայտությունների համար, եթե

$$x + z = y + z, \text{ ապա } x = y:$$

Ապացուցումը: Ապացուցելու համար բավական է  $x + z = y + z$  հավասարության երկու մասերին գումարել  $-z$ :

**2.3. Հավասարությունների հանման հատկությունները:** Ինչպես թվերի, այնպես էլ արտահայտությունների տարբերությունը բնորոշվում է գումարման միջոցով հետևյալ կերպ:

Կամայական  $x$  և  $y$  արտահայտությունների տարբերությունը այն  $z$  արտահայտությունն է, որը գումարելով  $y$ -ին կստանանք  $z$ , այսինքն՝  $z$ -ը  $x$ -ի և  $y$ -ի տարբերությունն է, եթե  $y + z = x$ :

Հատկություն 7: Կամայական երկու արտահայտությունների տարբերությունը գոյություն ունի և միակն է:  $x$  և  $y$  արտահայտությունների տարբերությունը  $x + (-y)$  արտահայտությունն է:

Ապացուցումը: Իսկապես,  $y + x + (-y) = x + y + (-y) = x + 0 = x$ : Այսինքն,  $x + (-y)$  արտահայտությունը  $x$  և  $y$  արտահայտությունների տարբերությունն է: Դիցուք  $z$ -ը նույնպես այդ

արտահայտությունների տարբերություն է՝  $y + z = x$ : Գումարելով այս հավասարության երկու մասերին  $-y$ , կստանանք  $-y + y + z = -y + x$  հավասարությունը, որից էլ կստանանք  $z = x + (-y)$ :

Ընդունված է  $x$  և  $y$  արտահայտությունների տարբերությունը նշանակել  $x - y$ : Այսպիսով, նկատի ունենալով վերջին հայտկությունը, ստանում ենք տարբերությունը բնութագրող հետևյալ հավասարությունը՝  $x - y = x + (-y)$ :

Նկատենք, որ այստեղ արտահայտությունների տարբերության համար օգտագործ “-” նշանը, որ գործածել էինք նաև արտահայտության հակադիրը նշանակելու համար:

Վերջին հատկությունը կարևոր դեր է խաղում հանման վերաբերյալ ուսումնասիրություններում: Օրինակ, ցույց տանք, որ կամայական  $x$  արտահայտության համար՝  $0 - x = -x$ : Ունենք՝  $x + (-x) = 0$ : Իսկ սա նշանակում է, որ

$$0 - x = -x:$$

**2.4. Հավասարության արտադրյալային հատկությունները:** Բազմապատկման գործողությունը առիթ է ստեղծում կամ պատճառ է դառնում արտահայտությունների ավելի մեծ խմբերի նույնականացման և, հետևաբար, հավասարությունների նոր տեսակներ ստանալու համար: Այդ հավասարություններից որոշները ընդունվում են առանց ապացուցման՝ որպես օրենքներ:

Արտադրյալի տեղափոխական օրենքը: Արտադրիչների տեղափոխումից արտադրյալը չի փոխվում: Այսինքն՝ կամայական  $x, y$  արտահայտությունների համար՝  $x \cdot y = y \cdot x$ :

Արտադրյալի գուգորդական օրենքը: կամայական  $x, y, z$  արտահայտությունների համար՝  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ :

Քանի որ  $(x \cdot y) \cdot z$  և  $x \cdot (y \cdot z)$  արտահայտությունները նույնական կամ հավասար են դրանցից յուրաքանչյուրը ընդունվում է որպես երեք՝  $x, y, z$  արտահայտությունների գումար՝  $x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ :

Մեկի օրենքը:  $x \cdot 1 = x$ :

Ապացուցումը: Դիցուք գոյություն ունեն երկու մեկեր՝  $1_1$  և  $1_2$ , այսինքն՝ կամայական  $x$  արտահայտության համար՝  $x \cdot 1_1 = x$  և  $x \cdot 1_2 = x$ : Այս հավասարություններից առաջինում  $x$ -ի փոխարեն ընդունելով  $1_2$ , իսկ երկրորդում՝  $1_1$ , կստանանք՝  $1_2 \cdot 1_1 = 1_2$  և  $1_1 \cdot 1_2 = 1_1$ : Այս հավասարություններից էլ կստանանք  $1_1 = 1_2$ :

Հավասարությունների բազմապատկման օրենքը: Հավասարությունները կարելի է մաս առ մաս բազմապատկել: Այսինքն, եթե  $x = y$ ,  $z = t$ , ապա  $x \cdot z = y \cdot t$ :

Հեշտությամբ կարելի է ապացուցել հետևյալ հատկությունը.

Հատկություն 9: Հավասարության երկու մասերը կարելի է բազմապատկել միևնույն արտահայտությամբ: Այսինքն, կամայական  $x, y, z$  արտահայտությունների համար՝ եթե  $x = y$ , ապա  $x \cdot z = y \cdot z$ :

Ապացուցումը կատարվում է հատկություն 5-ի ապացուցման նմանությամբ:

**2.5. Բազմապատկման կապը գումարման հետ:** Հավասարության նոր հատկություններ են առաջանում գումարման և հանման գործողությունների հետ արտահայտությունների բազմապատկման գործողության կապերում: Գլխավորը այստեղ հետևյալ օրենքն է:

Գումարի նկատմամբ արտադրյալի բաշխական օրենքը: Կամայական  $x, y, z$  արտահայտությունների համար՝  $x(y + z) = xy + xz$ :

Այս և արդեն հայտնի հատկություններից օգտվելով, կարելի է ապացուցել հետևյալ հատկությունը:

Հատկություն 10: Կամայական  $x, y, z$  արտահայտությունների համար՝

$$1) x \cdot 0 = 0,$$

$$2) x \cdot (-y) = -x \cdot y,$$

$$3) (-x) \cdot (-y) = xy,$$

$$4) \text{Հանման նկատմամբ արտադրյալի բաշխական հատկությունը}$$

$$x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z:$$

Ապացուցումը: 1) Կամայական  $x$  արտահայտության համար ունենք՝

$$x + x \cdot 0 = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x \cdot (1 + 0) = x \cdot 1 = x, \quad x + x: \text{Ուրեմն՝ } x \cdot 0 = 0:$$

2) Կամայական  $x$  և  $y$  արտահայտությունների համար ունենք՝

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot (-y + y) = x \cdot 0 = 0, \quad x \cdot (-y) + x \cdot y = 0, \text{ ուրեմն՝ } x \cdot (-y) = -x \cdot y:$$

3)  $x \cdot (-y) = -x \cdot y$  հավասարությունից կստանանք  $(-x) \cdot (-y) = -(-xy)$  Ունենք նաև  $-(-xy) = xy$ :  
Հետևաբար՝  $(-x) \cdot (-y) = xy$ :

$$4) \text{Ունենք՝ } x \cdot (y - z) = x \cdot (y + (-z)) = x \cdot y + x \cdot (-z) = x \cdot y - x \cdot z:$$

2.6. Արտահայտությունների հակադարձը: Արտահայտության հակադարձը այն արտահայտությունն է, որը բազմապատկվելով տրված արտահայտությամբ, ստացվում է զրո: Այսինքն՝  $y$  արտահայտությունը  $x$  արտահայտության հակադարձն է, նշանակում է  $xy = 1$ : Պարզ է, որ 0-ն հակադարձ չունի, քանի որ այն ինչ արտահայտությամբ էլ բազմապատկենք, կստանանք 0 և ոչ թե 1:

Չրոյից տարբեր կամայական արտահայտություն ունի հակադարձ, ինչը ապահովվում է հետևյալ օրենքով:

Օրենք հակադարձի գոյության մասին: Չրոյից տարբեր յուրաքանչյուր արտահայտություն ունի հակադարձ:

Հատկություն 11: Չրոյից տարբեր կամայական արտահայտության հակադարձը միակն է:

Ապացուցումը: Իսկապես, եթե զրոյից տարբեր  $x$  արտահայտությունը ունենար  $y$  և  $z$  հակադարձներ, ապա կունենանք՝  $z(xy) = z \cdot 1 = z$ ,  $(zx)y = 1 \cdot y = y$ : Բայց  $z(xy) = (zx)y$ : Հետևապես՝  $z = y$ :

Չրոյից տարբեր  $x$  արտահայտության հակադարձը նշանակվում է  $1/x$  տեսքով: Այսպիսով՝  $x \cdot 1/x = 1$ :

Հատկություն 12: Չրոյից տարբեր արտահայտությունների արտադրյալի հակադարձը հավասար է արտադրիչների հակադարձների արտադրյալին: Այսինքն՝ զրոյից տարբեր կամայական  $x$  և  $y$  արտահայտությունների համար՝  $1/xy = 1/x \cdot 1/y$ :

$$\text{Ապացուցումը: Ունենք՝ } xy \cdot 1/x \cdot 1/y = x \cdot 1/x \cdot y \cdot 1/y = 1 \cdot 1 = 1, \quad xy = 1:$$

Հակադարձի միջոցով ապացուցվում է հետևյալ կարևոր հատկությունը:

Հատկություն 13: Եթե արտահայտությունների արտադրյալը հավասար է զրոյի, ապա արտադրիչներից որևէ մեկը հավասար է զրոյի:

Ապացուցումը: Դիցուք  $xy = 0$  և  $x$  արտահայտությունը զրոյից տարբեր է: Այդ դեպքում այն ունի  $1/x$  հակադարձը, որով բազմապատկենք այդ հավասարության երկու մասերը: Կստանանք՝  $1/x \cdot xy = 1/x \cdot 0$  կամ  $1 \cdot y = 0$ ,  $y = 0$ :

2.7. Հավասարության քանորդային հատկությունները: Հավասարությունների միջոցով նույնականացման կարևոր հարցեր են առաջանում արտահայտությունների բաժանման գործողության ներգրավմամբ: Արտահայտությունների քանորդը սահմանվում է բազմապատկման գործողության միջոցով:

Կամայական  $x$  և  $y$  արտահայտությունների քանորդը այն  $z$  արտահայտությունն է, որի համար  $yz = x$ : Այս դեպքում ասում ենք նաև, որ  $x$ -ը բաժանվում է  $y$ -ի վրա:

Հասկանալի է, որ 0-ի վրա չի կարելի բաժանել, քանի որ 0-ի և կամայական արտահայտության արտադրյալի արդյունքում կստացվի 0: Ինչպես ցույց է տալիս հետևյալ հատկությունը, 0-ից տարբեր բոլոր արտահայտությունների վրա կարելի է կատարել բաժանում:

Հատկություն 14: Կամայական  $x$  և զրոյից տարբեր  $y$  արտահայտությունների համար գոյություն ունի նրանց միակ քանորդը, որն հավասար է  $x \cdot 1/y$  արտահայտությանը:

Ապացուցումը: Ունենք՝  $y \cdot x \cdot 1/y = y \cdot 1/y \cdot x = 1 \cdot x = x$ : Այսինքն՝  $x \cdot 1/y$ -ը  $x$ -ի և  $y$ -ի քանորդն է: Մյուս կողմից, եթե  $z$ -ը  $x$  և  $y$  արտահայտությունների քանորդն է, ապա կունենանք՝  $yz = x$ : Բազմապատկելով այս հավասարության երկու մասերը  $y$ -ի հակադարձով, կստանանք՝  $z = x \cdot 1/y$ :

Ընդունված է  $x$  և  $y$  արտահայտությունների քանորդը նշանակել  $x/y$ : Այսպիսով մենք ունենք՝  $x/y = x \cdot 1/y$ :

Քանի որ  $x \cdot 1/x = 1$ , ապա այստեղից հետևում է նաև, որ  $x$  արտահայտության հակադարձը նաև  $1/x$ -ը և  $x$ -ի քանորդն է:

### 3. Նույնականացման երկրորդ ճանապարհը

**3.1. Արտահայտության թվային արժեքը:** Կիրառական միջավայրում դիտարկվող իրադրություններ բնութագրվում են զանազան տվյալներով, որոնք արտահայտվում են թվերով կամ տառերով: Դրանց մի մասը մնում են անփոփոխ տվյալ իրադրության պայմաններում և կոչվում են հաստատուններ: Հաստատուններ են բոլոր թվերը, որոնք անփոփոխ են բոլոր իրադրություններում: Թվերից բացի հաստատուն կարող են լինել նաև տառերը: Նման տառերի համար հատուկ շեշտվում է, որ նրանք հաստատուններ են: Ի տարբերություն հաստատունների, արտահայտության մեջ մասնակցող փոփոխականները այն տառերն են, որոնք կարող են ընդունել զանազար թվային արժեքներ: Եթե արտահայտության մեջ մտնող բոլոր փոփոխականներն ընդունում են որոշակի թվային արժեքներ, ապա արտահայտությունը նույնպես ընդունում են որոշակի թվային արժեք:

**3.2. Նույնաբար հավասար արտահայտություններ կամ նույնություններ:** Հանրահաշվական արտահայտությունների նույնականացման երկրորդ եղանակը կատարվում է դրանց ընդունած թվային արժեքների համեմատության միջոցով: Երկու հանրահաշվական արտահայտություններ կոչվում են նույնաբար հավասար, եթե նրանք ընդունում են միևնույն արժեքները նրանցում մասնակցող փոփոխականների ընդունած միևնույն արժեքների դեպքում:  $x$  և  $y$  արտահայտությունների նույնական հավասարությունը դարձյալ արձանագրվում է  $x = y$  հավասարության տեսքով: Այդ դեպքում հավասարությունը կոչվում է նաև նույնություն:

**3.4. Հիմնական խնդիրը և նրա լուծումը:** Հիմնական խնդիրը: Արդյո՞ք հավասարության և նույնության գաղափարները չեն համընկնում: Այսինքն, արդյո՞ք յուրաքանչյուր հավասարություն նույնություն է և յուրաքանչյուր նույնություն՝ հավասարություն:

Բազմանդամների հավասարությունը: Երկու բազմանդամներ կոչվում են հավասար, եթե նրանք հնարավոր է բերել միևնույն կանոնական տեսքի:

Հատկություն 1: Մեկ փոփոխականով երկու բազմանդամներ հավասար են նշանակում է նրանք նույնաբար են հավասար:

Ապացուցումը: Եթե մեկ փոփոխականով երկու  $f(x)$  և  $g(x)$  բազմանդամներ հավասար են, ապա բերվում են միևնույն կանոնական տեսքի և հետևաբար նույնաբար հավասար են:

Հակառակը, դիցուք  $f(x)$  և  $g(x)$  բազմանդամները նույնաբար հավասար են: Ցույց տանք, որ նրանք նաև հավասար են: Դիտարկենք  $f(x) - g(x)$  բազմանդամը: Ակնհայտ է, որ այն կունենա

անթիվ բազմությամբ արմատներ: Իսկ մենք գիտենք, որ  $n$  աստիճանի բազմանդամը ունի  $n$ -ից ոչ ավելի արմատներ: Հետևաբար  $f(x) - g(x)$  բազմանդամի անթիվ բազմությամբ արմատներ կունենա, միայն այն դեպքում, եթե այն հավասար է զրոյի՝  $f(x) - g(x) = 0$  և ուրեմն  $f(x) = g(x)$ :

**Հատկություն 2:** Ռացիոնալ արտահայտությունները հավասար են նշանակում է նրանք նույնաբար են հավասար: Այսինքն՝

ա. ռացիոնալ արտահայտությունների հավասարությունը նույնություն է,

բ. ռացիոնալ արտահայտությունների նույնությունը հավասարություն է:

Ապացուցումը: ա. Ցույց տանք, որ ռացիոնալ արտահայտությունների յուրաքանչյուր հավասարություն նույնություն է: Սկսենք բազմանդամներից: Թվում է հասկանալի, որ եթե երկու բազմանդամներ բերվում են միևնույն կատարյալ տեսքի, ապա նրանք փոփոխականների կամայական արժեքների դեպքում իրենց կատարյալ տեսքերի հետ միասին ընդունում են միևնույն արժեքը:

Այնուհետև, եթե ունենք երկու ռացիոնալ արտահայտություններ, դրանք ներկայացնենք  $f/h$  և  $g/q$  ռացիոնալ կոտորակների տեսքով: Պարզ է, որ կունենանք նաև  $f/h = g/q$  հավասարությունը, ինչից էլ կհետևի բազմանդամների  $fq = gh$  հավասարությունը: Այդ վերջինս նաև նույնական հավասարություն է, ըստ նախորդ պարբերության մեջ արված դիտարկման: Հետևաբար  $f/h$  և  $g/q$  ռացիոնալ կոտորակների մեջ մտնող փոփոխականների կամայական թույլատրելի արժեքների դեպքում դրանք իրար հավասար են: Այդտեղից կստանանք նաև համապատասխան հավասարություն  $f/h$  և  $g/q$  ռացիոնալ կոտորակների և ուրեմն՝ տրված ռացիոնալ արտահայտությունների համար:

Հակառակը, դիցուք ունենք երկու ռացիոնալ արտահայտությունների նույնական հավասարություն: Ապացուցենք, որ այն հավասարություն է: Այդ ռացիոնալ արտահայտությունները ներկայացնելով համապատասխանաբար  $f/h$  և  $g/q$  ռացիոնալ կոտորակներ տեսքով, կստանանք  $f/h = g/q$  նույնական հավասարությունը կամ նույնությունը: Պարզ է, որ նույնություն կլինի նաև բազմանդամներով գրառված  $fq = gh$  բանաձևը: Ցույց տանք, որ այն հավասարություն է: Դիցուք այն հավասարություն չէ: Դիտարկենք  $fq - gh$  բազմանդամը և կատարյալ տեսքով: Այն նույնաբար հավասար է զրոյի, բայց նրա ոչ բոլոր գործակիցներն են զրոյական: Պատճառը  $u$ -ի մեջ ոչ նման անդամների առկայությունն է: Իսկ դա տեղի կունենա, եթե  $u$ -ի միանդամներում մասնակցող փոփոխականներից գոնե մեկը, դիցուք՝  $x$ -ը այդ բազմանդամի գումարելիներում մասնակցի տարբեր աստիճանացույցերով: Այժմ եթե  $u$ -ի մեջ մտնող բոլոր փոփոխականներին, բացի  $x$ -ից, տանք 1 արժեքը, կստանանք մեկ՝  $x$  փոփոխականով մի  $v$  բազմանդամ, որը դարձյալ կլինի նույնաբար 0, այսինքն՝  $x$ -ի բոլոր արժեքների դեպքում հավասար է զրոյի, բայց նրա ոչ բոլոր գործակիցներն են հավասար զրոյի: Այստեղից ստացվում է, որ ունենք ոչ զրոյական  $v$  բազմանդամ, որն ունի անթիվ բազմությամբ արմատներ, ինչը հնարավոր չէ, որովհետև հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ, որ մեկ փոփոխականով յուրաքանչյուր բազմանդամի արմատների թիվը չի կարող գերազանցել փոփոխականի ամենաբարձր աստիճանացույցին: Ստացված հակասությունն էլ ցույց է տալիս, որ ինչպես  $v$  և  $u$ , այնպես էլ  $fq-gh$  բազմանդամները հավասար են զրոյի: Հետևաբար  $fq=gh$  նույնությունը նաև բազմանդամների հավասարություն է: Իսկ այդ հավասարության երկու մասերը բաժանելով  $hq$  ոչ զրոյական արտադրյալի վրա, կստանանք պահանջվող  $f/h=g/q$  հավասարությունը:

## Գրականության ցանկ

- 1.Յ. Мендельсон Введение в математическую логику. М.: Книга по Требованию, 2013.
- 2.Հ.Ս. Միրայեղյան, Հանրահաշիվ 7, Էդիթ Պրինտ, 2006:
- 3.Հ.Ս. Միրայեղյան, Հանրահաշիվ 8, Էդիթ Պրինտ, 2024:
- 4.Հ.Ս. Միրայեղյան, Հանրահաշիվ 9, Արեգ, 2025:

## ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԻՋԻՆ ԴՊՐՈՑԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ Համլետ Սուրենի Միրայեղյան, Արաքսյա Տիգրանի Մկրտչյան

**Ամփոփում:** Աշխատանքում դիտարկվում է ռացիոնալ կոտորակների նույնականացման խնդիրը հանրակրթական միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացի շրջանակներում: Նախ ցույց է տրվում հավասարության գաղափարի կարևորությունը հանրահաշվական արտահայտությունների դաշտում՝ որպես այդ օբյեկտների հատկությունների բացահայտման հիմնական ուղիներից մեկը: Հաջորդիվ որպես նման ուղի է ներկայացվում նաև նույնականացման երկրորդ ճանապարհը՝ հանրահաշվական արտահայտությունների նույնությունը: Վերջում ցույց է տրվում, որ նույնականացման այդ երկու եղանակները հանգեցնում են նույն արդյունքին: Միջին դպրոցի հանրահաշվի դասագրքերում այս փաստի վրա սովորաբար ուշադրություն չի դարձվում, և սովորողը այդպես էլ չի հասկանում հավասարության և նույնության տարբերությունը: Ընդ որում, հիմնական արդյունքի այստեղ բերված ապացուցումը շատ պարզ է և վերցված է հեղինակներից մեկի միջին դպրոցի համար գրված դասագրքից: Հարկ ենք համարում նշել նաև հանրահաշվի ոչ միայն կիրառական, տեխնիկական –վարժանքային նշանակության, այլև մշակութային, իմաստասիրական, արժեքականական ներուժի արժարժման խնդիրը, ինչին միտված են ինչպես սույն աշխատանքը՝ մասամբ, այնպես էլ հիշատակված դասագիրքը:

**Բանալի բառեր:** Միջին դպրոց, հանրահաշվի դասընթաց, հանրահաշվական կոտորակ, հավասարություն, նույնություն, նույնականացում:

## УРАВНЕНИЕ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ Гамлет Суренович Микаелян, Араксия Тиграновна Мкртчян

**Аннотация.** В статье рассматривается задача идентификации рациональных дробей в рамках курса алгебры для средней школы. Сначала показывается важность идеи равенства в области алгебраических выражений как одного из основных способов выявления свойств этих объектов. Затем в качестве такого способа представлен второй способ идентификации – тождество алгебраических выражений. Наконец, показано, что эти два способа идентификации приводят к одному и тому же результату. В учебниках по алгебре для средней школы этот факт обычно не учитывается, и ученик не понимает разницы между равенством и тождеством. Более того, доказательство основного результата, представленного здесь, очень простое и взято из учебника для средних школ, написанного одним из авторов. Мы также считаем необходимым затронуть вопрос о раскрытии не только прикладного, технико-образовательного значения алгебры, но и её культурного, философского и ценностного потенциала, на что, в частности, направлены настоящая работа и упомянутый учебник.

**Ключевые слова:** Средняя школа, курс алгебры, алгебраическая дробь, равенство, тождество, идентификация.

## **EQUATION IN THE SECONDARY SCHOOL ALGEBRA COURSE**

**Hamlet Sureni Mikayelyan, Araksya Tigrani Mkrtchyan**

**Summary.** The paper considers the problem of identifying rational fractions within the framework of the secondary school algebra course. First, the importance of the idea of equality in the field of algebraic expressions is shown as one of the main ways of revealing the properties of these objects. Next, the second way of identification is presented as such a way - the identity of algebraic expressions. Finally, it is shown that these two methods of identification lead to the same result. In secondary school algebra textbooks, this fact is usually not paid attention to, and the student does not understand the difference between equality and identity. Moreover, the proof of the main result presented here is very simple and is taken from a textbook written for secondary schools by one of the authors. We also consider it necessary to mention the issue of addressing not only the applied, technical-training significance of algebra, but also its cultural, philosophical, and value-based potential, which is what this work, in part, and the aforementioned textbook are aimed at.

**Keywords:** High school, algebra course, algebraic fraction, equality, identity, identification.

*Получено в редакцию - 23.02.2025*

*Рецензирована – 11.04.2025*

*Отправлен на сайт – 12.06.2025*

# **ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐԸ ՄԻՋԻՆ ԴՊՐՈՑԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՈՒՄ**

**Ալվարդ Հայկի Մուրադյան**

**ՀՊՄՀ Մաթեմատիկայի և նրա դասավանդման մեթոդիկայի ամբիոնի մագիստրոս**



*Մուրադյան Ա. Հ., մագիստրոս*

## **Ներածություն**

Հավասարման գաղափարը հանրահաշվում եղել է առանցքային սկսած հանրահաշվի սկզբնավորումից: Դեռևս հանրահաշվի հիմնադիր Ալ-Խորեզմին, հանրահաշվի իր հիմնարար գրքում հանրահաշվի հիմնական նպատակը տեսնում է հավասարումների լուծման մեջ [3]: Հավասարումները հանդես են գալիս որպես կարևոր գործիք ինչպես ներհանրահաշվական, այնպես էլ կիրառական հարցերի պատասխանը գտնելու ճանապարհին: Այդ պատճառով հավասարումների դերը կանոնավոր է բոլոր ժամանակներում: Եվ կրթական չափորոշիչներում, ծրագրերում, դասագրքերում նույնպես հավասարման գաղափարը ծառայեցվում է վերը նշված խնդիրներն իրականացնելու համար: Այս միտումը ակնառու կերպով դրսևորվում է նաև մեզանում. հավասարման գաղափարը առանցքային դեր է խաղում ՀՀ միջին դպրոցի հանրահաշվի ծրագրերում և դասընթացներում:

## **Հավասարման գաղափարը պատմական տարբեր ժամանակներում**

Հավասարման ամենավաղ ձևերը հանդիպում են հին եգիպտական և բաբելոնյան մաթեմատիկայում: Եգիպտացիները օգտագործել են հավասարման նշաններ՝ թվաբանական

գործողությունների արդյունքները գրանցելու համար: Բաբելոնացիները զարգացրել են հավասարումներ, մասնավորապես՝ քառակուսային հավասարումներ լուծելու որոշակի մեթոդներ [1, 2]: Ախմեսի պապիրուսում կա հատուկ բաժին «Կույտի հաշվումը»: Այստեղ «կույտ» բառի տակ ենթադրվում է անհայտ մեծությունը: Պապիրուսի այս բաժնում մտցված են միևնույն տիպի խնդիրներ: Դիտարկենք օրինակ [4]:

«Կույտը: Նրա  $2/3$ -ը, նրա  $1/2$ -ը, նրա  $1/7$ -ը և նրա ամբողջը: Այդ՝ 33» :

Խնդրի ամենասկզբում դրված է «կույտ» բառը: Ակնհայտ է, որ դա խոսում է այն մասին, որ այդ խնդիրը հավասարում կազմելու վերաբերյալ է: «Կույտը» (անհայտ մեծությունը) նշանակելով  $x$  տառով, կազմում ենք հավասարում՝

$$2/3 x + 1/2 x + 1/7 x = 33 :$$

Հին հույները, ինչպիսիք են Էվկլիդեսը և Դիոֆանտոսը, զարգացրել են հավասարման գաղափարը՝ այն կիրառելով երկրաչափական և հանրահաշվական խնդիրներ լուծելու համար: Նրանք օգտագործել են հավասարումներ՝ անհայտ մեծությունները գտնելու և երկրաչափական պատկերների հատկությունները ուսումնասիրելու համար [1, էջ 193]:

Դիոֆանտեսի մոտ, որպես հավասարության նշան, գործածվել է  $i$  տառը: Նրա ընտրությունը ընկավ այբուբենի այդ տառի վրա, որովհետև նրանից է սկսվում հունական «isos» բառը, որը նշանակում է «հավասար» [4, էջ 25] :

Երկար ժամանակ տարբեր երկրների մաթեմատիկոսներ հավասարման արմատները գտել են միայն դրական թվերի բազմության մեջ:  $3x + 6 = 2x + 1$  հավասարումը, որի արմատը  $-5$  բացասական թիվն է, Դիոֆանտեսն անվանում է «անտեղի» [4, էջ 26] :

Միջնադարյան իսլամական և եվրոպական մաթեմատիկոսները, ինչպիսիք են Ալ-Խորեզմին և Ֆիրոնաչին, զարգացրել են հանրահաշվական հավասարումներ լուծելու մեթոդներ և ընդլայնել հավասարման գաղափարը՝ այն կիրառելով առևտրային և աստղագիտական խնդիրներ լուծելու համար: Մասնավորապես, Ալ Խորեզմին տալիս է որոշ տեսքի քառակուսային հավասարումների լուծման մեթոդ: Ընդ որում երկրաչափական տեսքով ներկայացնում է լուծման հիմնավորումը [3]:

12-րդ դարի հնդիկ մաթեմատիկոս Բհասկարան կատեգորիկ պնդում է, որ մարդիկ բացասական արմատները չեն հավանում: Հավասարումների բացասական լուծումների իմաստի առկայությունն առաջինն անվերապահորեն ճանաչեց ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Նիկոլա Ծյուկեն: 1484թ. ավարտած աշխատանքում նա քննարկում է խնդիրներ, որոնք հանգում են բացասական արմատներով հավասարումների: Այսպես, օրինակ, խնդիրներից մեկը նրան հանգեցնում է այսպիսի հավատարման՝

$$(x/4 + x/5 + 20 - x)(1 - 1/3) = 10:$$

Հավասարման բացասական արմատի կապակցությամբ (այստեղ  $x = -7\frac{3}{11}$ ) և հետագայում նրա օգտագործումը խնդրի հարցի պատասխանի համար որպես հանելի  $(20 - x = -27\frac{3}{11})$ , Ծյուկեն հայտարարում է, որ «այդ հաշվարկումը, որը ոմանք համարում են անհնարին, ճիշտ է» [4, էջ 27]:

Վերածննդի և Նոր ժամանակների մաթեմատիկոսները ստեղծեցին ժամանակակից հանրահաշվական նշանակումները, ինչը հնարավորություն տվեց գտնել հավասարումների լուծման ընդհանուր մեթոդներ: Քառակուսային հավասարումների արմատների համար հայտնի բանաձևերին նրանք ավելացրին նմանատիպ բանաձևեր երրորդ և չորրորդ աստիճանի հավասարումների արմատների համար: Հետագայում, ընդհուպ մինչև 19-րդ դարի սկիզբը, մաթեմատիկայի հիմնահարցերից մեկը եղել է կամայական աստիճանի հավասարման արմատների համար նույնպես գտնելու նմանատիպ բանաձևեր: Եվ միայն տասնիններորդ դարի

սկզբներին ֆրանսիացի հանճարեղ մաթեմատիկոս 21-ամյա Էվարիստ Գալուան ցույց տվեց, որ նման ընդհանրական բանաձևեր գոյություն չունեն։ Գալուայի հայտնագործությունը այնքան նորարական էր, որ ժամաբակի խոշորագույն մաթեմատիկոսները չհասկացան այն։ Եվ միայն շուրջ կես դար հետո պարզ դարձավ Գալուայի մտահղացումը։ Այն դարձավ նաև ժամանակակից հանրահաշվի ստեղծման կարևոր ազդակներից մեկը։

### **Հավասարման գաղափարը ՀՀ հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի առարկայական ծրագրերում**

Հավասարման գաղափարը ՀՀ հանրակրթական դպրոցի 6-րդ դասարանի «Մաթեմատիկա», 7-րդ, 8-րդ, 9-րդ դասարանների «Հանրահաշիվ» առարկայական ծրագրի ուսումնասիրությունը ստորև ներկայացված են թեմաների, տվյալ թեմաներին համապատասխան նպատակների ու վերջնարդյունքների աղյուսակի և դասերի միջոցով։

6-րդ դասարանի «Մաթեմատիկա» առարկայի առարկայական ծրագրի մեջ հավասարումների հետ առնչվող նյութերը են՝

*Հավասարումներ թեմայից.*

Նպատակը՝ Հավասարումների և պարզ հավասարումների հանգող խնդիրների լուծման հմտությունների ձևավորումը, զարգացումը։

Վերջնարդյունքները՝ Լուծի մեկ անհայտով պարզագույն գծային հավասարումներ։ Լուծի խնդիրներ՝ նաև հավասարում կազմելով։ Առանձնացնի խնդրի պայմանը և պահանջը, անհայտ և հայտնի տվյալները։ Կազմի խնդրի լուծման քայլաշար։ [13]։

7-րդ դասարանի «Հանրահաշիվ» առարկայի առարկայական ծրագրի մեջ հավասարումների հետ առնչվող նյութերը են՝

*Բազմանդամներ թեմայից.*

Նպատակը՝ Բազմանդամների հետ գործողություններ կատարելու հմտությունների և կարողությունների ձևավորում և զարգացում։

Վերջնարդյունքները՝ Սահմանի բազմանդամ հասկացությունը, գումարի, հանի բազմանդամները։ Բազմապատկի բազմանդամը միանդամով, բազմանդամը՝ բազմանդամով։ Վերլուծի բազմանդամը արտադրիչների։

*Մեկ անհայտով գծային հավասարումներ թեմայից .*

Նպատակը՝ Մեկ անհայտով գծային հավասարումների լուծման, կիրառման հմտությունների ձևավորումը և զարգացումը։

Վերջնարդյունքները՝ Լուծի մեկ անհայտով գծային հավասարումները։ Գտնի թիվը տրված մասով, տոկոսով։ Լուծի տեքստային խնդիրներ շարժման, մասերի, տոկոսների, ուղիղ և հակադարձ համեմատականության վերաբերյալ։ Կիրառի պարզ տոկոսը խնայողության, պարտքի և գումարների համատեքստով խնդիրներ լուծելիս, գործնական, հետազոտական և/կամ նախագծային առաջադրանքներ կատարելիս։

8-րդ դասարանի «Հանրահաշիվ» առարկայի առարկայական ծրագրի մեջ հավասարումների հետ առնչվող նյութերը են՝

*Գծային հավասարումների համակարգեր թեմայից.*

Նպատակը՝ Հավասարումների համակարգերի ուսումնասիրումը, գծային հավասարումների համակարգերի լուծման տարբեր եղանակների, տեքստային խնդիրների լուծման հմտությունների ձևավորումը և զարգացումը

Վերջնարդյունքները՝ Արտահայտի երկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարման մի անհայտը մյուսով։ Լուծի երկու անհայտով երկու առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգ տարբեր

եղանակներով: Պարզի հավասարումների և համակարգերի համարժեքությունը, կազմի համարժեք համակարգեր: Իմանա երկու ուղիղների փոխդասավորության և երկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգի լուծման կապի մասին, ներկայացնի այդ դեպքերը դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով: Լուծի առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգի բերվող տեքստային խնդիրներ:

***Քառակուսային եռանդամ թեմայից.***

**Նպատակը՝** 1. Քառակուսի արմատով արտահայտությունների հետ գործողություններ անելու հմտությունների ձևավորումը և զարգացումը: 2. Քառակուսի եռանդամի հետ գործողություններ անելու, քառակուսային հավասարումների լուծման, դրանք կիրառելու հմտությունների ձևավորումը և զարգացումը:

**Վերջնարդյունքները՝** Սահմանի քառակուսի արմատը, կիրառի հատկությունները: Ձևափոխի քառակուսի արմատ պարունակող արտահայտություններ: Լուծի քառակուսային հավասարումներ: Կիրառի Վիետի ուղիղ և հակադարձ թեորեմները: Վերլուծի քառակուսային եռանդամը գծային արտադրիչների: Անջատի լրիվ քառակուսի քառակուսային եռանդամից: Լուծի քառակուսային հավասարման բերվող տեքստային խնդիրներ:

***Մոդուլ պարունակող, իռացիոնալ պարզագույն հավասարումներ և անհավասարումներ թեմայից.***

**Նպատակը՝** Մոդուլ պարունակող, իռացիոնալ պարզագույն հավասարումների լուծման հմտությունների և կարողությունների ձևավորումը և զարգացումը:

**Վերջնարդյունքները՝** Լուծի մոդուլ պարունակող պարզագույն հավասարումներ ( $\text{or. } |f(x)|=a$ ): Լուծի  $\sqrt{ax+b}=c$ ,  $\sqrt{ax+b}=\sqrt{cx+d}$  տեսքի հավասարումներ: [13]

9-րդ դասարանի «Հանրահաշիվ» առարկայի առարկայական ծրագրի մեջ հավասարումների հետ առնչվող նյութերը են

***Ռացիոնալ հավասարումներ թեմայից.***

**Նպատակը՝** Ռացիոնալ հավասարումների լուծման և խնդիրների մաթեմատիկական մոդելավորման հմտությունների և կարողությունների ձևավորումը:

**Վերջնարդյունքները՝** Լուծի քառակուսայինի բերվող, ռացիոնալ հավասարումներ: Մոդելավորի և լուծի ռացիոնալ հավասարումների հանգող խնդիրներ:

***Ռացիոնալ հավասարումների համակարգեր թեմայից.***

**Նպատակը՝** Երկու անհայտով ռացիոնալ հավասարումների համակարգերի լուծման եղանակների, տարբեր իրավիճակներում դրանց կիրառման հմտությունների ձևավորումն ու զարգացումը:

**Վերջնարդյունքները՝** Լուծի առաջին և երկրորդ աստիճանի հավասարումների համակարգեր: Մոդելավորի և լուծի ռացիոնալ հավասարումների համակարգերի հանգող խնդիրներ:

6-րդ դասարանում Նպատակ է դրվել սովորողների տրամաբանական մտածողությունը զարգացնել՝ անցնելով պարզ հավասարություններից դեպի մեկ անհայտով հավասարումներ: Ուսուցման գործընթացում զարգանում են վերլուծական հմտություններ: Սակայն կարելի է ընդգծել տարբեր լուծման մոտեցումները՝ մտածողության բազմազանությունը խթանելու համար:

7-րդ դասարանում կարևորվել է աշակերտների կարողությունը՝ աշխատել երկու փոփոխականի հետ միաժամանակ: Սովորողները վարժվում են համակարգված մտածելակերպի: Բայց կարելի է ավելացնել գրաֆիկորեն լուծման մոտեցումները՝ տեսողական ընկալման ուժեղացման համար:

8-րդ դասարանը կարևոր անցումային փուլ է դեպի ավելի արստրակտ մաթեմատիկա: Հարկավոր է ապահովել տեսական և գործնական մասերի հավասարակշռությունը՝ դժվարությունը մեղմելու նպատակով:

9-րդ դասարանում շեշտադրում է կատարվել երկու փոփոխականի փոխազդեցության ուսումնասիրության, ֆունկցիոնալ մտածողության ձևավորման վրա: Այստեղ կարելի է ընդգծել իրական կյանքի կիրառական խնդիրների դերակատարությունը՝ սովորողների հետաքրքրությունը բարձրացնելու համար:

Ամփոփելով մեր կատարած աշխատանքը առարկայական ծրագրի շրջանակներում կարող ենք ասել, որ դասակարգումը համահունչ է կրթական պահանջներին և համապատասխանում է սովորողների տարիքային զարգացման տրամաբանությանը:

Առավելություններ կարելի է համարել թեմաների հաջորդական և տրամաբանական կառուցվածքը, բազային գիտելիքների ամրապնդումը, վերլուծական և տրամաբանական մտածողության զարգացումը:

Իսկ թերությունները հիմնականում վերաբերում են՝ իրական կիրառական օրինակների ոչ ակտիվ ներգրավմանը, տարբեր լուծման մեթոդների բազմազանության ընդգծմանը: Միջառարկայական և ներառարկայական կապերից միայն, որոշ տեղերում նշված է «Մայրենիի» կամ «Հայոց լեզվի» հետ կապերը: Ծրագրում թեմաների կառուցվածքը տալիս է ամուրի հիմք հետագա բարդ գիտելիքների յուրացման և մաթեմատիկական մտածողության ձևավորման համար: սակայն միայն կառուցվածքը բավարար չէ լավ արդյունքի հանգեղու համար, անհրաժեշտ է գրագետ մոտեցում յուրաքանչյուր թեմայի համար:

### **Ինչպե՞ս են ընկալվում հավասարման գաղափարը մաթեմատիկայի ուսուցիչները**

Հավասարման գաղափարի ընկալման վերաբերյալ կատարել ենք հարցումներ, որոնց մասնակցել են Հայաստանի Հանրապետության տարբեր շրջաններում դասավանդող 20 ուսուցիչներ: Ուսուցիչը պետք է ընտրեր առաջարկվող պատասխաններից մեկը: Առաջարկվել են հետևյալ հարցերը:

1. Ինչպե՞ս եք բացատրում հավասարության հասկացությունը աշակերտներին:

- ա) Ստատիկ կերպով՝ գրավոր նմուշներով*
- բ) Դիտական վարժություններով և օրինակներով*
- գ) Միանգամից նախորդ թեմաների հետ համեմատություն կատարելով*
- դ) Աշակերտների մասնակցությամբ խմբային քննարկումների միջոցով*

2. Որոշե՞ք, թե ո՞րն է, ըստ ձեզ, առավել արդյունավետ մեթոդը հավասարության և հավասարման ուսուցման համար:

- ա) Վարժություններ և խնդիրներ լուծելը*
- բ) Գրավոր բացատրություններ և նկարագրողումներ*
- գ) Սահմանափակ խմբերում ուսուցում և հարցազրույցներ*
- դ) Տեխնոլոգիաների և վիդեո ուսուցման միջոցների կիրառումը*

3. Ինչքա՞ն հաճախ եք օգտագործում դասավանդման մեջ պրակտիկ, կյանքի վրա հիմնված խնդիրներ, որոնք կապված են հավասարման հետ:

- ա) Հաճախ, ուսուցման բոլոր փուլերում*
- բ) Հաճախ, բայց միայն որոշակի թեմաների դեպքում*
- գ) Հաճախ չեմ օգտագործում*
- դ) Երբեմն, բայց ոչ կարևոր թեմաների համար*

4. Ի՞նչ ճանապարհով եք գնահատում աշակերտների հասկանալու աստիճանը հավասարման մասին:

- ա) Ուսումնական վարժությունների ու խնդիրների միջոցով*
- բ) Անձնական հարցազրույցների և բացատրությունների միջոցով*
- գ) Խմբային քննարկումներով*
- դ) Գիրք ու թեստերի միջոցով*

5. Որքա՞ն հաճախ են աշակերտները ունենում դժվարություններ հավասարման հասկացությունների վերաբերյալ:

- ա) Ծառ հաճախ, հատկապես սկզբնական դասերին*
- բ) Հաճախ, սակայն շուտով հասկանում են*

- զ) Երբեմն, երբ խոսքը գնում է բարդ խնդիրների մասին
- դ) Կիսով չափ, երբեմն նրանք հեշտությամբ հասկանում են

**6. Ինչպիսի՞ մեթոդներ եք կիրառում աշակերտների մոտ հավասարության և հավասարման թեմայի հետաքրքրությունը բարձրացնելու համար:**

- ա) Խաղերի և խաղալծերի օգտագործում
- բ) Իրական կյանքից օրինակներ ներկայացնել
- գ) Աշակերտների խմբային աշխատանքների կազմակերպում
- դ) Տեխնոլոգիական միջոցների կիրառումը (առցանց հարթակներ)

**7. Ինչպես եք հաղթահարում աշակերտների այն խնդիրը, որ նրանք դժվարությամբ են տարբերում հավասարումը հավասարությունից:**

- ա) Պատկերավոր և տեսողական եղանակով բացատրում եմ
- բ) Նմուշների օգնությամբ, օգտագործելով պարզ օրինակներ
- գ) Աշակերտներին խնդրում եմ համեմատել նշանը իրենց անձնական փորձի հետ
- դ) Մտավոր քննարկումներ և հարցուպատասխան

**8. Ինչպիսի՞ մեթոդ եք կիրառում հավասարման գաղափարին հանգող դասերի ժամանակ :**

- ա) Էվրիստիկ գրույցի մեթոդ
- բ) Ինտերակտիվ մեթոդներ
- գ) Այլ
- դ) Չեմ կիրառում որևէ մեթոդ

**9. Ինչպե՞ս եք վերաբերում աշակերտների կողմից հաճախ արվող սխալներին, որոնք կապված են հավասարության և հավասարման հետ:**

- ա) Անմիջապես ուղղում եմ սխալը և բացատրում
- բ) Մտածում եմ, թե ինչպես կարող եմ նրանց ավելի լավ բացատրել
- գ) Խնդրում եմ աշակերտներին ինքնուրույն լուծել սխալը
- դ) Տվյալ սխալի վրա հիմնված նոր խնդիր եմ տալիս աշակերտներին

**10. Ինչպե՞ս եք բացատրում հավասարման լուծման մեջ հայտնված սխալների պատճառները:**

- ա) Աշակերտներին տրամադրում եմ բացառապես տեսական բացատրություն
- բ) Օգտվում եմ իրական խնդիրներից կամ օրինակումներից
- գ) Գրում եմ պարզ ու հասկանալի քայլեր, որոնք օգտագործվում են սխալի ծագումը բացատրելու համար
- դ) Ընդհանուր դասակարգումով քննարկում ենք սխալի առաջացման պատճառները

Հետազոտության արդյունքում ստացանք հետևյալ արդյունքները.

- Առաջին հարցին ուսուցիչների 60 %-ը նշել է 4-րդ տարբերակը:
- Երկրորդ հարցին մեծամասնությունը 55 %, նշել է 1-ին տարբերակը:
- Երրորդի դեպքում 70 %-ը ընտրել է առաջին տարբերակը:
- Հաջորդիվ 65 %-ը առաջին տարբերակը:
- Հինգերորդ հարցին շատերը 35 % նշել են 3-րդ տարբերակը:
- Այնուհետև երկրորդ պատասխանը ընտրել են հարցվողների 45 %-ը:
- Յոթերորդ հարցին ուսուցիչների 40 % -ը նշել է առաջին տարբերակը:
- Ութերորդ հարցի համար հարցվողների 40%-ը նախընտրել է ինտերակտիվ մեթոդները:
- Իններորդ հարցի համար 45 % - ի մոտ տրվել է 4-րդ պատասխանը:
- Վերջին հարցին 75 % - ը նախընտրել է նշել երրորդ տարբերակը:

Արդյունքում եկանք այն եզրահանգմանը, որ ուսուցիչների մեծամասնության համար Հավասարմանը վերաբերող թեմաները ավելի հեշտ է բացատրել խմբային աշխատանքների միջոցով, իսկ առավել արդյունավետ մեթոդ են համարում վարժությունների և խնդիրների

լուծումը: Նշում են, որ հաճախ ուսուցման բոլոր փուլերում օգտագործում են կիրառական խնդիրներ, իսկ աշակերտների գնահատումը նախընտրում կատարել վարժություններ և խնդիրներ լուծելիս:

Հիմնականում ուսուցիչները նշում են որ աշակերտները դժվարանում են բարդ խնդիրների ժամանակ, իսկ հավասարումներին վերաբերող թեմաների դասավանդման ժամանակ նախընտրում են իրական կյանքից օրինակներ ներկայացնել: Մեծամասամբ նշում են, որ կիրառում են պատկերավոր և տեսողական եղանակով բացատրել այս թեմաները, կիրառում են ինտերակտիվ մեթոդներ, իսկ աշակերտների սխալվելու դեպքում բացատրում ու տվյալ սխալի հիման վրա նոր խնդիր առաջադրում:

### Ինչպե՞ս են ընկալում հավասարման գաղափարը հանրակրթական դպրոցի աշակերտները

Ստորև ներկայացված են, այն հարցերը, որոնց հարցմանը մասնակցել են Հայաստանի Հանրապետությունում 7-9-րդ դասարանում սովորող տարբեր դպրոցների 60 աշակերտներ:

#### 1. Ի՞նչ է նշանակում հավասարություն մաթեմատիկայում:

- ա) Երկու թվերի կամ արտահայտությունների նույնությունը
- բ) Թվերի մեծության համեմատություն
- գ) Գործողություն մաթեմատիկայում
- դ) Կոտորակի պարզեցում

#### 2. Ի՞նչ է հավասարումը:

- ա) Համեմատություն երկու թվային արտահայտությունների միջև
- բ) Մաթեմատիկական արտահայտություն, որտեղ անհայտ է տրված
- գ) Մաթեմատիկական որևէ գործողություն
- դ) Տառային արտահայտությունների համեմատություն:

#### 3. Ինչպե՞ս կբացատրեք հավասարության և հավասարման տարբերությունը:

- ա) Չկա տարբերություն, դրանք նույն բանն են
- բ) Հավասարությունը երկու կողմերի նույնությունն է, իսկ հավասարումը՝ խնդիր անհայտով
- գ) Հավասարումը գործողություն է, իսկ հավասարությունը՝ թիվ
- դ) Հավասարումը միայն թվերի հետ է կապված, հավասարությունը՝ ոչ

#### 4. Ո՞ր դեպքում է հավասարումն ունենում ճիշտ երկու արմատ:

- ա)  $2x + 3 = 7$
- բ)  $x + x = x^2$
- գ)  $5 + y = 5y$
- դ)  $3a = a + a 5$

#### 5. Եթե $x = 4$ , ապա $2x + 5$ -ի արժեքը ինչի՞ է հավասար:

- ա) 9
- բ) 10
- գ) 13
- դ) 11

#### 6. Ո՞ր արտահայտության արմատ կհամարվի 3-ը:

- ա)  $x + 2 = 6$
- բ)  $2x = 5$
- գ)  $x^2 = 9$
- դ)  $x - 1 = 5$

#### 7. Ի՞նչ դժվարություններ եք ունենում հավասարումներ լուծելիս:

- ա) Չեմ հասկանում, թե ինչպես գտնել անհայտը
- բ) Չեմ հիշում կանոնները
- գ) Խառնվում եմ գործողությունների հերթականության մեջ
- դ) Չեմ ունենում դժվարություններ

**8. Ինչպե՞ս եք սովորաբար լուծում հավասարումներ:**

- ա) Մտքում հաշվելով
- բ) Գրելով և քայլ առ քայլ լուծելով
- գ) Կանոններն անգիր անելով
- դ) Տեսողական մեթոդներ օգտագործելով

**9. Արդյո՞ք հավասարումների լուծման գործընթացը քեզ հետաքրքիր է:**

- ա) Այո, շատ հետաքրքիր է
- բ) Մի փոքր հետաքրքիր է
- գ) Չի հետաքրքրում, քայց անում եմ
- դ) Ընդհանրապես չի հետաքրքրում

**10. Նշվածներից ո՞ր եղանակով եք ավելի լավ յուրացնում մաթեմատիկական նյութը:**

- ա) Ուսուցչի բացատրությամբ
- բ) Խնդիրներ ինքնուրույն լուծելով
- գ) Տեսանյութեր դիտելով
- դ) Խմբային աշխատանքների միջոցով

Հետազոտության արդյունքում 1-6 ստուգման հարցերի արդյունքները ներկայացրել ենք վիճակագրական, որոշ տարրերի միջոցով: Տվյալ վերլուծությունը նպատակ ունի ուսումնասիրելու ճիշտ և սխալ պատասխանների քանակական և տոկոսային հարաբերակցությունը: Վերլուծության հիմքում ընկած են հիմնական վիճակագրական պարամետրերը՝ լայնք, մոդ, մեդիան, միջին և միջին քառակուսային շեղում:

| Հարց | Ճիշտ պատասխանների քանակը | Ճիշտ պատասխանները % -ով | Սխալ պատասխանների քանակը | Սխալ պատասխանները % -ով |
|------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 1    | 47                       | 78.3 %                  | 13                       | 21.7 %                  |
| 2    | 38                       | 63.3 %                  | 22                       | 36.7 %                  |
| 3    | 43                       | 71.7 %                  | 17                       | 28.3 %                  |
| 4    | 32                       | 53.3 %                  | 28                       | 46.7 %                  |
| 5    | 57                       | 95.0 %                  | 3                        | 5.0 %                   |
| 6    | 47                       | 78.3 %                  | 13                       | 21.7 %                  |

Լայնք՝  $57-32 = 25$

Մոդ՝ 47

Մեդիան՝ 43

Միջին՝  $\frac{32+38+43+2*47+57}{6} = 44$

Միջին քառակուսարին շեղում՝  $\sigma = \sqrt{\frac{144+36+1+2*9+169}{6}} \approx 7,8$

Բացի նախորդիվ նշված հարցումների վերլուծությունից անդրադառնանք 7-10-րդ հարցերին: 7-րդ հարցին մեծամասնությունը պատասխանել է, որ չունի դժվարություններ հավասարումներ լուծելիս ( 26 աշակերտ, 41,94%):

8-րդ հարցում ամենաշատը նշվել է երկրորդ տարբերակը, ուստի գրելով և քայլ առ քայլ լուծելով ավելի լավ են յուրացնում աշակերտները տրված թեման (43 աշակերտ, 60,56 %): 9-րդ հարցից եզրակացրինք, որ աշակերտներին մեծամասամբ շատ հետաքրքիր է հավասարումների լուծման ընթացքը ( 35 աշակերտ, 58,33 %): 10-րդ հարցի արդյունքներով հաստատվեց այն որ

հիմնականում աշակերտները դասը յուրացնում են ուսուցչի բացատրության միջոցով ( 42 աշակերտ, 55,26%):

### **Եզրակացություն**

Հավասարման գաղափարը, կատարելով կիրառական և զուտ մաթեմատիկական կարևորագույն գործառնություններ, անցել է զարգացման պատմական երկար շրջան և ապահովել իր կայուն տեղը կրթության ասպարեզում՝ որպես մաթեմատիկայի առանցքային գաղափարներից մեկը: Հավասարման գաղափարը լայնորեն մասնակցում է ՀՀ հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի առարկայական ծրագրում: Հավասարման գաղափարը ներառված է բոլոր մակարդակներում, սակայն նրա ներկայացման ձևերը և ուսուցման մեթոդները դեռ կարող են կատարելագործվել՝ առավել խորքային և կիրառական ընկալման համար: Ուսուցիչների մոտ առկա է համակարգված մոտեցում հավասարման գաղափարի վերաբերյալ, մինչդեռ աշակերտների մոտ երբեմն գերակշռում են մեխանիկական մոտեցումները: Այնուամենայնիվ աշակերտական տարբեր մակարդակներում կա հավասարման գաղափարի ճիշտ ընկալում:

### **Գրականության ցանկ**

1. *Carl B. Boyer*, A History of Mathematics, 1968.
2. *Ռ. Ս. Սարիբեկյան*, Մաթեմատիկայի պատմություն - Եր.: Լիմուշ, 2008
3. *Мухамед Ибн Муса Ал-Хорезми*, Математические трактаты. Ташкент, 1983.
4. <https://www.arlis.am/documentview.aspx?docid=149788>
5. <https://www.arlis.am/documentview.aspx?docID=171261>
6. <https://www.arlis.am/DocumentView.aspx?DocID=179965>
7. <https://www.arlis.am/DocumentView.aspx?DocID=192777>
8. <https://infourok.ru/statya-na-temu-svyaz-matematiki-i-informatiki-6750665.html>
9. <https://externat.foxford.ru/polezno-znat/wiki-himiya-uravneniya-himicheskikh-reakcij>
10. <https://ya.ru/neurum/c/ekonomika-ifinansi/q/kak-sistema-uravneniy-vliyaet-na-ekonomicheskie-c64cb054>

### **ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐԸ ՄԻՋԻՆ ԴՊՐՈՑԻ ՀԱՆՐԱՀԱԾՎԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՈՒՄ**

#### **Ալվարդ Հայկի Մուրադյան**

**Ամփոփում:** Աշխատանքում դիտարկվում է հավասարման գաղափարը միջին դպրոցի հանրահաշվի ուսուցման գործընթացում: Նախ արվում է համառոտ ակնարկ մաթեմատիկայում հավասարման կիրառման վերաբերյալ: Ներկայացվում է հին աշխարհի, Անտիկ Հունաստանի, միջնադարի փորձը: Հանգամանորեն ներկայացվում է հավասարման գաղափարի արժարժման խնդիրը ՀՀ մաթեմատիկայի ծրագրի միջին դպրոցին նվիրված հատվածում, ներառելով թեմաները, նպատակը և ուսուցման վերջնարդյունքները: Ներկայացվում է նաև փորձարարական հետազոտություն ուսուցչական և աշակերտական ընկալումներում հավասարման գաղափարի վերաբերյալ: Կիրառվում է հարցման մեթոդը: Կատարվում է ստացված տվյալների վերլուծություն:

**Բանալի բաներ:** Հավասարում, հանրահաշիվի ուսուցման գործընթաց, մաթեմատիկայի պատմություն:

## **ИДЕЯ УРАВНЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ИСЧИСЛЕНИЮ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ**

**Алвачд Айки Мурадян**

**Резюме.** В работе рассматривается идея уравнения в процессе обучения алгебре в средней школе. Сначала делается краткий обзор применения уравнений в математике. Представлен опыт античного мира, Древней Греции и Средневековья. Подробно представлена проблема рассмотрения идеи уравнения в разделе программы по математике РА, посвященном средней школе, включая темы, цели и результаты обучения. Также представлено экспериментальное исследование концепции уравнения в восприятии учителя и ученика. Применен метод опроса. Анализируются полученные данные.

**Ключевые слова:** Уравнение, процесс обучения алгебре, история математики.

## **THE IDEA OF EQUATION IN THE MIDDLE SCHOOL CALCULUS TEACHING PROCESS**

**Alvachd Aiki Muradyan**

**Summary.** The work considers the idea of equation in the process of teaching algebra in middle school. First, a brief overview is made of the application of equations in mathematics. The experience of the ancient world, Ancient Greece, and the Middle Ages is presented. The problem of addressing the idea of equation in the section of the RA mathematics program dedicated to middle school is presented in detail, including the topics, goals, and learning outcomes. An experimental study on the concept of equation in teacher and student perceptions is also presented. The survey method is applied. The obtained data is analyzed.

**Keywords:** Equation, algebra learning process, mathematical history.

**Получено в редакцию – 05.05.2025**

**Рецензирована – 27.05.2025**

**Отправлен на сайт – 12.06.2025**

Երրորդ ոտնակային քառանկյունների մասին

Ավագ Տեղմանի Կոստանյան  
Հայկական ԱԵԿ



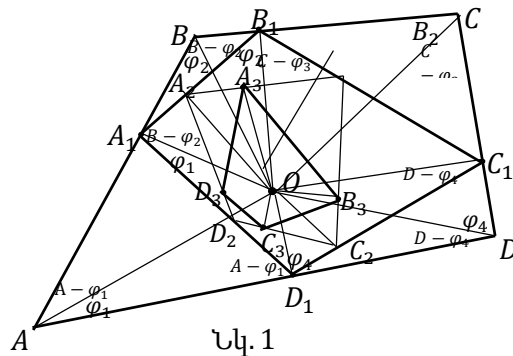
Կոստանյան Ա. Տ. ինժեներ  
Հայկական ատոմակայան

Ներածություն

Նախորդ աշխատանքում [1] ապացուցվել է, որ կամայական ուռուցիկ քառանկյան ներքին տիրույթի ցանկացած  $M$  կետի համար դրա չորրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է սկզբնականին: Այս աշխատանքում ցույց կտանք, որ քառանկյան ներքին տիրույթում գոյություն ունի  $O$  կետ, որի նկատմամբ երրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է սկզբնականին:

**Թեորեմ 1:** Կամայական  $ABCD$  ուռուցիկ քառանկյան ներքին տիրույթում գոյություն ունի  $O$  կետ, որի նկատմամբ երրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է  $ABCD$  քառանկյանը:

Դիցուք  $ABCD$ -ն որևէ ուռուցիկ քառանկյուն է: Ենթադրենք, որ  $O$  կետը որոնելին է և դրա նկատմամբ երրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է սկզբնականին (նկ. 1):  $O$  կետը միացնենք քառանկյան  $A, B, C$ , և  $D$  գագաթներին:  $O$  կետը գագաթներին միացնող ուղիղները քառանկյան անկյունները տրոհում են մասերի  $(\varphi_1; A - \varphi_1)$ ,  $(\varphi_2; B - \varphi_2)$ ,  $(\varphi_3; C - \varphi_3)$  և  $(\varphi_4; D - \varphi_4)$ : Ներմուծենք  $O$  կետի նկատմամբ  $A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  $A_2 B_2 C_2 D_2$  և  $A_3 B_3 C_3 D_3$  ոտնակային քառանկյունները: Այստեղից  $A_3 = \varphi_1 + D - \varphi_4$ ,  $B_3 = \varphi_2 + A - \varphi_1$ ,  $C_3 = \varphi_3 + B - \varphi_2$  և  $D_3 = \varphi_4 + C - \varphi_3$ : Կարող ենք հաշվել  $O$  կետով և  $ABCD$  քառանկյան գագաթներով կազմավորված  $AOC$  և  $BOD$  անկյունների մեծությունները: Քառանկյուն  $AOCB$ -ից ստանում ենք  $\angle AOC = 360^\circ - (A - \varphi_1 + B + \varphi_3)$ , իսկ քառանկյուն  $BODC$ -ից՝  $\angle BOD = 360^\circ - (B + \varphi_2 + C + \varphi_4)$ : Եթե ընդունենք  $A_3 B_3 C_3 D_3$  երրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է  $ABCD$  քառանկյանը, ապա  $A_3 = B$ ,  $B_3 = C$ ,  $C_3 = D$  և  $D_3 = A$ , որտեղից գումարելով  $B_3 + C_3 = C + D = \varphi_2 + A - \varphi_1 + B - \varphi_2 + \varphi_3 = A - \varphi_1 + B + \varphi_3$ , իսկ  $C_3 + D_3 = A + D = \varphi_3 + B - \varphi_2 + \varphi_4 + C - \varphi_3 = B - \varphi_2 + C + \varphi_4$ : Հետևաբար կարելի է հաշվել



Նկ. 1

$$\angle AOC = 360^\circ - (A - \varphi_1 + B + \varphi_3) = 360^\circ - (C + D),$$

$$\angle BOD = 360^\circ - (B - \varphi_2 + C + \varphi_4) = 360^\circ - (A + D):$$

Այսպիսով  $O$  կետը  $AOC$  և  $BOD$  աղեղների հատման կետն է: Ուրեմն տեղի ունի հետևյալ պնդումը: Եթե  $ABCD$  ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերի վրա կառուցենք համապատասխան  $360^\circ - (D + A)$  և  $360^\circ - (C + D)$  աղեղնային մեծությունները, որի յուրաքանչյուր կետից  $AC$  և  $BD$  անկյունագծերը կերևան համապատասխանաբար  $360^\circ - (C + D)$  և  $360^\circ - (A + D)$  անկյունների տակ, ապա այդ աղեղների հատման  $O$  կետի նկատմամբ երրորդ ոտնակային  $A_3B_3C_3D_3$  քառանկյունը նման է սկզբնականին  $ABCD$  քառանկյունին:

### Հավասարասրուն սեղանների մի դասի մասին

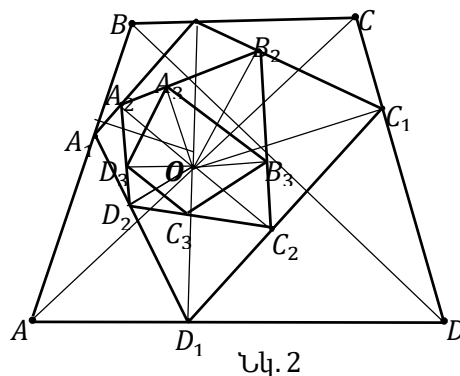
Դիտարկենք հավասարասրուն սեղանի ոտնակային քառանկյունների նմանության մասին հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 2:** Հավասարասրուն սեղանի անկյունագծերի միջևակետերի նկատմամբ առաջին, երկրորդ և երրորդ ոտնակային քառանկյունները նման են սկզբնական հավասարասրուն սեղանին:

Ապացուցում: Տրված է  $ABCD$  հավասարասրուն սեղան (նկ. 2)

$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle C \text{ և } \angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ:$$

Համաձայն թեորեմ 1-ի  $\angle AOC = 360^\circ - (C + D)$  իսկ  $\angle BOD = 360^\circ - (D + A)$ , քանի որ  $C + D = 180^\circ$  հետևաբար  $\angle AOC = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$ , ուրեմն  $A, O, C$  կետերը պատկանում են միևնույն ուղղի, իսկ  $OD = 360^\circ - (D + A) = 360^\circ - 2A$ , այս անկյան աղեղը կհատվի  $AC$  անկյունագծի հետ  $O$  կետում, որի նկատմամբ  $A_3B_3C_3D_3$  ոտնակային քառանկյունը նման է  $ABCD$  հավասարասրուն սեղանին: Նման ձևով կարելի է ցույց տալ, որ  $O$  կետի նկատմամբ  $A_1B_1C_1D_1$  առաջին և  $A_2B_2C_2D_2$  երկրորդ ոտնակային քառանկյունները նման են սկզբնական  $ABCD$  սեղանին:



Նկ. 2

Հաշվենք  $A_2 B_2 C_2 D_2$  ուսնակային քառանկյան անկյունները մեծությունները՝

$$A_2 = \varphi_1 + C - \varphi_3, \quad B_2 = \varphi_2 + D - \varphi_4, \quad C_2 = \varphi_3 + A - \varphi_1, \quad D_2 = \varphi_4 + B - \varphi_2:$$

Ընդունելով  $A_2 = B, B_2 = D, C_2 = A, D_2 = C$  կունենանք

$$B = \varphi_1 + C - \varphi_3, \quad D = \varphi_2 + D - \varphi_4, \quad A = \varphi_3 + A - \varphi_1, \quad C = \varphi_4 + B - \varphi_2, \quad \text{որտեղից}$$

$$\varphi_1 = \varphi_3, \quad \varphi_2 = \varphi_4, \quad \text{հետևաբար,}$$

$$\angle AOC = 360^\circ - (A - \varphi_1 + B + \varphi_3) = 360^\circ - (A+B) = 180^\circ,$$

$$\angle BOD = 360^\circ - (B - \varphi_2 + C + \varphi_4) = 360^\circ - (B+C):$$

Հաշվենք  $A_1 B_1 C_1 D_1$  ուսնակային քառանկյան անկյունների մեծությունները՝

$$A_1 = \varphi_1 + B - \varphi_2, \quad B_1 = \varphi_2 + C - \varphi_3, \quad C_1 = \varphi_3 + D - \varphi_4, \quad D_1 = \varphi_4 + A - \varphi_1: \quad \text{Ընդունելով } A_1 = B, B_1 = C,$$

$$C_1 = D \text{ և } D_1 = A \text{ կունենանք } B = \varphi_1 + B - \varphi_2, \quad C = \varphi_2 + C - \varphi_3, \quad D = \varphi_3 + D - \varphi_4, \quad A = \varphi_4 + A - \varphi_1,$$

$$\text{որտեղից } \varphi_1 = \varphi_2, \quad \varphi_2 = \varphi_3, \quad \varphi_3 = \varphi_4, \quad \varphi_4 = \varphi_1:$$

$$\angle AOC = 360^\circ - (A - \varphi_1 + B + \varphi_3) = 360^\circ - (A+B) = 180^\circ,$$

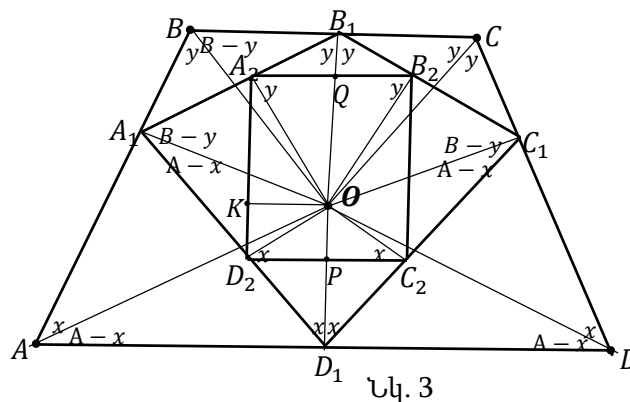
$$\angle BOD = 360^\circ - (B - \varphi_2 + C + \varphi_4) = 360^\circ - (B+C):$$

Հետևաբար  $AC$  անկյունագծի  $O$  կետում կառուցված առաջին և երկրորդ ուսնակային քառանկյունները նույնպես նման են տրված  $ABCD$  հավասարասրուն սեղանին:

**Թեորեմ 3:**  $ABCD$  հավասարասրուն սեղանի հիմքերի միջնուղղահայացի վրա գոյություն ունի  $O$  կետ, որի նկատմամբ երկրորդ ուսնակային քառանկյունը քառակուսի է:

Ապացուցում: Տրված է  $ABCD$  հավասարասրուն սեղան, միջնուղղահայացի որևէ  $O$  կետում կառուցենք երկրորդ ուսնակային քառանկյունը (նկ.3):  $O$  կետը միացնենք  $A, B, C$ , և  $D$  գագաթներին:  $O$  կետով և գագաթներով տրոհված անկյունները կլինեն  $\angle OAB = \angle ODC = x$  իսկ  $\angle OBA = \angle OCD = y$ : Հաշվենք  $A_2 B_2 C_2 D_2$  քառանկյան անկյունների մեծությունները, ընդունելով որ  $A_2 B_2 C_2 D_2$  քառանկյունը քառակուսի է, կունենանք  $A_2 B_2 = B_2 C_2 = C_2 D_2 = D_2 A_2 = a$ : Հետևաբար,  $OK = \frac{a}{2}$ , իսկ  $OP + OQ = a$  կունենանք

$$\frac{OP}{OK} = \operatorname{tg} x \quad OP = OK \operatorname{tg} x, \quad \frac{OQ}{OK} = \operatorname{tg} y, \quad OQ = OK \operatorname{tg} y:$$



Գումարելով կստանանք  $OP + OQ = OK(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)$  կամ  $a = \frac{a}{2}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)$  որտեղից  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2$ :

Հետևաբար  $O$  կետով և  $AB$  կողմով և  $CD$  կողմերով կազմված  $OBA$  և  $OAB$  անկյունների տանգենսների գումարը հավասար է երկուսի: Տեսնում ենք որ, քառակուսու կառուցելիությունը կապված է  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2$  պայմանի հետ, որտեղ  $x$ -ը և  $y$ -ը  $AB$  սրունքի հետ  $OA$  և  $OB$  ուղիղների կազմած անկյունների մեծություններն են:

### Գրականության ցանկ

1. **Կոստանյան Ա.**, Ունակային քառանկյունների մասին, «Մաթեմատիկան դպրոցում», թիվ N4,(117), էջ 92-96, 2024:
2. **Кокстер Г.С.М., Грейтцер С.Л.**, Новые встречи с геометрией, Москва, “Наука“, 1978г. 224 стр.
3. **Հարությունյան Ս.**, Երկրաչափություն, մաս առաջին, Երևան, «Աստղիկ» գրատուն, 2010թ., 484 էջ:

### ԵՐՐՈՐԴ ՈՏՆԱԿԱՅԻՆ ՔԱՌԱՆԿՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

#### Ավագ Տոլեմակի Կոստանյան Հայկական ատոմակայան

**Ամփոփում:** Նախորդ հոդվածում ապացուցվել է, որ կամայական ուռուցիկ քառանկյան ներքին տիրույթի ցանկացած կետի նկատմամբ չորրորդ ունակային քառանկյունը նման է սկզբնականին: Սույն աշխատանքում քննարկվում է հետևյալ խնդիրը՝ գոյություն ունի՞ արդյոք կամայական ուռուցիկ քառանկյան ներքին տիրույթի կետ, որի նկատմամբ երրորդ ունակային քառանկյունը նման է սկզբնականին: Պատասխանը դրական է: Ապացուցված է, որ կամայական ABCD ուռուցիկ քառանկյան ներքին տիրույթում գոյություն ունի O կետ, որի նկատմամբ երրորդ ունակային քառանկյունը նման է ABCD-ին: Հոդվածի երկրորդ մասում այդ արդյունքը կիրառված է կիսականոնավոր սեղանների դասի դեպքում: Նախ ապացուցված է, որ կիսականոնավոր սեղանների անկյունագծերի միջնակետերի նկատմամբ առաջին, երկրորդ, երրորդ ունակային քառանկյունները նման են սկզբնականին: Դրանից հետո ապացուցվել է, որ ABCD կիսականոնավոր սեղանի հիմքի միջնուղղահայացի վրա գոյություն ունի O կետ, որի նկատմամբ երկրորդ ունակային քառանկյունը քառակուսի է:

**Բանալի բառեր:** ունակային եռանկյուն, նմանություն:

### ABOUT THIRD PEDAL QUADRANGLE

#### Avag Telmaky Kostanyan Armenian atomic station

**Summary.** It was proved in previous article that with respect of any point in the interior of any convex quadrangle the fourth pedal quadrangle is similar to the initial quadrangle. In the present work the following problem is discussed. Is there a point in the interior of any convex quadrangle such that the third pedal quadrangle with respect of this point is similar to the initial quadrangle? The answer is positive. It is established, that there is a point O in the interior of any convex quadrangle ABCD such that the third pedal quadrangle is similar to ABCD. In the second part of the present article, this result is applied for the class of semi canonical trapeziums. First, it is proved that the first, second, third pedal quadrangles with respect of midpoints of diagonals of semi canonical trapeziums are similar to the initial trapezium. Then it is established, that there is a point O on the middle perpendicular of the base of semi canonical trapezium ABCD such that the second pedal quadrangle with respect of this point is a square.

**Key words:** pedal quadrangle, similarity, pedal triangle.

## О ТРЕТЬЕМ ПЕДАЛЬНОМ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКЕ

Аваг Тельмакович Костанян  
Армянская атомная станция

**Резюме.** В предыдущей статье было установлено, что четвертый педальный четырехугольник по отношению к любой внутренней точке произвольного выпуклого четырехугольника подобен исходному. В настоящей работе обсуждается следующая задача: существует ли точка внутренней области произвольного выпуклого четырехугольника, по отношению к которой третий педальный четырехугольник подобен исходному? Ответ положительный. Доказано, что во внутренней области произвольного выпуклого четырехугольника  $ABCD$  существует точка  $O$ , по отношению к которой третий педальный четырехугольник подобен  $ABCD$ . Во второй части статьи этот результат применяется для класса полуканонических трапеций. Вначале доказывается, что первый, второй, третий канонический четырехугольник по отношению к серединам диагоналей полуканонической трапеции подобен исходной трапеции. После этого доказывается, что на серединном перпендикуляре основания полуканонической трапеции  $ABCD$  существует точка  $O$ , по отношению к которой вторым педальным четырехугольником является квадрат.

**Ключевые слова:** педальный трехугольник, подобие, педальный треугольник..

**Получено в редакцию - 10.09.2024**

**Рецензирована – 06.12.2024**

**Отправлен на сайт – 12.04.2025**

## ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ՈՐՊԵՍ ԳՈՐԾԻՔԱՅԻՆ ԱՐԺԵՔ

Արգարյան Մամիկոն Արմենակի

Կարմրաշենի միջնակարգ դպրոց

Դիանի հիմնական դպրոց

Արագածոտնի մարզ



*Մամիկոն Արգարյան*

Մաթեմատիկայի ուսուցիչ

### Ներածություն

Առօրյա կյանքում մարդը սովորաբար յուրաքանչյուր առարկա կամ երևույթ գնահատում կամ արժևորում է՝ ելնելով իր համար դրա կարևորությունից, առաջին հերթին, այն պայմանավորելով օգտակարությամբ, պահանջմունքներով և այլ հանգամանքներով: Ինչպես նաև, գնահատումը իրականացնում է ելնելով իր բանականությունից, հույզերից ու զգացմունքներից: Որոշ առարկաներ կարող են արժեք ունենալ միայն առանձին մարդկանց համար, մյուսները՝ մարդկանց խմբերի, հասարակության, ազգի, պետության կամ ողջ մարդկության համար [1]: Ասենք՝ **Մեսրոպ Մաշտոցը**՝ հայ ժողովրդի, թիվը՝ մարդկության և **լույսը**՝ մոլորակի համար: Կամ իմ պապը արժեք ունի ինձ համար, Աշոտ Երկաթ թագավորը՝ հայ ժողովրդի, իսկ Ալեքսանդր Մակեդոնացին՝ ողջ մարդկության համար:

Արժեքները կարևոր նշանակություն ունեն մարդու համար: Դրանք ուսումնասիրման համար ստեղծվել է գիտության առանձին բնագավառ, որ կոչվում է արժեքաբանություն: Արժեքաբանության մեջ տարանջատվում են նպատակային և գործիքային արժեքները: Առաջինները այն արժեքներն են, որոնք մարդը կարևորում է որպես նպատակ, իսկ եկրորդները կարևորվում են որպես գործիք այս կամ այն նպատակի կամ խնդրի իրականացման համար:

[2] դասագրքում առաջադրվում է խնդիր մաթեմատիկայի՝ որպես արժեքի նպատակային կամ գործիքային լինելու վերաբերյալ: Հարցին պատասխանելու համար կարևոր ենք մարդու գնահատման չափանիշները արդեն մաթեմատիկայի նկատմամբ. մաթեմատիկայի՝

ա) որպես գործիք ծառայել,

բ)

նպատակ հանդիսանալը:

Մաթեմատիկան այս չափանիշներից որի՞ն է բավարարում: Այստեղից էլ պարզ են դառնում երկու հիմնական խնդիրները՝ ինչպես է մաթեմատիկան ծառայում որպես գործիք, և ինչպես է մաթեմատիկան դառնում նպատակ: Իսկ այժմ վերադառնանք մեր հիմնական հարցադրման առաջին կետին՝ **մաթեմատիկան որպես գործիքային արժեք:**

Թե որքանով է մարդուն անհրաժեշտ մաթեմատիկան, որպես գործիք նախ և առաջ պայմանավորված է մարդկային պահանջմունքները բավարարելու տեսանկյունով: Ուստի մաթեմատիկայի գործիքային արժեք լինելը ավելի իմաստավոր ու ընկալելի կդառնա եթե նրա կարևորությանը անդրադարձ կատարենք մի քանի դասակարգումներով: Մաթեմատիկան՝ տեսանելի կամ անտեսանելի, միշտ էլ եղել է մարդու կողքին: Այն օգնել է մարդուն՝ առօրեական պարզագույն խնդիրների լուծումներից մինչև գիտատեխնիկական ամենաբարդ մտահաղացումների իրականացում: Եվ մեզանից յուրաքանչյուրը նույնպես իր կենսագործունեության ընթացքում առնչվում է մաթեմատիկայի հետ, օգտվում նրա միջոցով ստեղծված գիտական ու տեխնիկական նվաճումներից: Բայց երբևէ մենք մտածում ենք այն մասին, թե ինչ է նշանակում կամ ինչ է մաթեմատիկան: Անտիկ հույների տված «գիտելիք» կամ «գիտություն» անվանումը քիչ բան է ասում նրա մասին, ինչպես և մարդու անունը նրա մասին շատ բան չի ասում: Մաթեմատիկայի ևս մեկ անվանում տվել է մեծ մաթեմատիկոս Կարլ Գաուսը՝ այն անվանելով ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԹԱԳՈՒՀԻ: Մաթեմատիկայի վերաբերյալ պարզագույն գիտելիքները մարդուն անհրաժեշտ են եղել նրա գոյության վաղնջենական ժամանակներից՝ հաշվելու, համեմատելու, կառուցելու, փոխանակելու և նմանատիպ այլ գործողությունների համար, առանձնահատուկ արժեք ու նշանակություն հաղորդելով նրանց: Բարբարա Օքլին, ուղեղի ցողունային բջիջների հետազոտող և «Մտածիր մաթեմատիկոսի պես» գրքի հեղինակը, ընդգծում է. «Մաթեմատիկան մեզ փրկում է «կախարդական մտածողությունից». մենք ձգտում ենք հասկանալ իրերի էությունը և չենք ապավինում պատահականությանը և ավելի բարձր ուժերին»: Տեղին է հիշել նաև հույն գիտնական, մաթեմատիկոս և փիլիսոփա Պյութագորասի խոսքը թվերի մասին՝ «Թիվը բոլոր իրերի էությունն է»:

Մաթեմատիկայի շնորհիվ մենք տիրապետում ենք ճանաչողական և կիրառական նոր գործիքների ու հնարքների, այն նպաստում է մեր պատկերացումների զարգացմանը, սովորեցնում է մտածել և արտահայտվել ոչ միայն բնական լեզվով, այլև թվերի ու պատկերների լեզվով: Մաթեմատիկան ուղեղի մարզիչ է համակարգավորում, վերլուծություն, կրճատում, օրինաչափությունների բացահայտում, վարկածների կազմում - այս ամենը օգնում է զարգացնել անհրաժեշտ հմտությունները, ինչպես սպորտով զբաղվելն օգնում է ամրապնդել մկանները և մարմինն ավելի շարժուն դարձնել [5]: Դրանով է պայմանավորված մաթեմատիկայի համատարած կիրառությունը առօրյայում, կենցաղում, արվեստում և արհեստներում, բնագիտության մեջ, տեխնիկայում և այլուր: Ուստի հարկ է վերհիշել գերմանացի աստղագետ, տեսական աստղագիտության հիմնադիր Յոհան Կեպլերի խոսքերը մաթեմատիկայի ճյուղերից՝ երկրաչափության վերաբերյալ «Ողջ բնության ու նրբագեղ երկնքի պատկերանշանն արտացոլումը երկրաչափության արվեստն է» [4]:

Մաթեմատիկան հազարամյակների պատմություն ունի, և այն որոշակի տեղեկություններ է կրում մարդկային մտքի ու մշակույթի պատմության մասին: Այն ծագել է գործնական ու

կիրառական խնդիրներից, իսկ այնուհետև աստիճանաբար ընդլայնել ճանաչողության ու կիրառության ոլորտները: Հոդաչափումների, ճանապարհաշինության, քաղաքաշինության, քարտեզագրության, արհեստների և ժամանակակից տեխնիկական սարքավորումների հիմքում ընկած են մաթեմատիկական օրենքներն ու հատկությունները: Ավելին, քանդակագործության, ճարտարապետության, կիրառական արվեստների ստեղծագործությունները կատարվում և ընկալվում են տարածական պատկերացումների շնորհիվ [4]: Այլ խոսքով՝ արտադրության, գիտության, տեխնիկայի, արվեստի բնագավառներում և ամենօրյա կյանքում մեզ ուղեկցում են մաթեմատիկական կիրառությունները, գործունեությունը մաթեմատիկական օրենքներով: Մաթեմատիկան նպաստում է նաև հաղորդակցական կարողությունների զարգացմանը: Երկրաչափական պատկերներ հետազոտելիս, երբ դրանց վերաբերյալ կշռադատություններ ենք անում, զարգանում են մեր լեզվական հմտությունները: Մասնավորապես՝ հարստանում է ակտիվ բառապաշարը, սովորում ենք արտահայտվել ճշգրիտ, հստակ, հակիրճ և հասկանալի: Եվ պատահական չէ, որ մաթեմատիկայի մասին տարածվել են բազմաթիվ թեմավոր ասույթներ: «Մաթեմատիկան պետք սիրել թեկուզ նրա համար, որ կարգի է բերում մեր միտքը» և այլն:

Ակնհայտ է դառնում նաև մաթեմատիկայի դերը մարդու կյանքում: Այն վստահորեն դիրքավորված է մեր կյանքի բոլոր ոլորտներում: Համակարգիչները, պլանշետները, ժամանակակից հեռախոսները մեզ ուղեկցում են ամեն րոպե, և դրանց ստեղծումն անհնար է առանց մեծ գիտության օրենքների և հաշվարկների օգտագործման: Իսկ հին հույները պնդում էին, որ մաթեմատիկան բոլոր գիտությունների բանալին է:

Այնուամենայնիվ, մաթեմատիկայի դերը մարդկանց և հասարակության կյանքում չի սահմանափակվում նման կիրառություններով, առավել նշանակալից է մաթեմատիկայի դերը գիտության բոլոր բնագավառներում իր խիստ անհրաժեշտությամբ ու հաշվարկներով, ինչի օգնությամբ բացահայտումներ են արվում, օրինաչափություններ են հայտնաբերվում: Առանց հիմնական մաթեմատիկական օրենքների իմացության ժամանակակից կյանքում դրանք օգտագործելու հնարավորության, դժվար է սովորել որևէ մասնագիտություն: Մաթեմատիկան մաքրում է մառախուղը՝ ուսումնասիրում է այն, ինչ մենք դեռ չենք ուսումնասիրել մեր աշխարհում: Պատկերացրեք մի աշխարհ, որտեղ մաթեմատիկան գոյություն չունի: Առանց թվերի, տրամաբանության ու կառուցվածքի մեր առօրյան կդառնար քաոս:

Դիտարկենք նաև «Ինչու՞ է կյանքում մաթեմատիկան անհրաժեշտ» հարցը: - Սա պարզապես հետաքրքրասիրություն չէ, այլ անհրաժեշտություն: Մաթեմատիկան ոչ միայն բարդ բանաձևեր և հավասարումներ է, այլ նաև հաջողակ կյանքի բանալին, որը դուռ է բացում տրամաբանական մտածողության, խնդիրներ լուծելու կարողության և նույնիսկ ֆինանսական գրագիտության համար: Մաթեմատիկան սերտորեն կապված է բազմաթիվ գիտությունների հետ: Խոսենք մեզ շրջապատող աշխարհում մաթեմատիկայի այն դրսևորումների մասին, որոնք հասկանալի են բոլորին:

1. Մաթեմատիկան գործիքային արժեք է սոցիալ-իրավական տեղեկատվական համակարգում: Հավաքագրման գործընթացներում տեղեկատվական փոխակերպումները կապված են մաթեմատիկական մեթոդների կիրառման հետ, որոնց օգնությամբ անհրաժեշտ հաշվարկային գործողություններն իրականացվում են ավտոմատացված. տեղեկատվական ձևաչափերով: Օրինակ, հավանականությունների տեսությունը և մաթեմատիկական վիճակագրությունը օգնում են տեսնել պատահական իրադարձությունների օրինաչափությունները և կանխատեսել դրանց հնարավոր արդյունքները:

2. Պրոֆեսիոնալները նաև պնդում են, իրավունքի ոլորտում տեղեկատվական գործընթացներն ուսումնասիրելիս օգտագործվում են բարձրագույն մաթեմատիկայի այնպիսի ճյուղեր, ինչպիսիք

են բազմությունների ու հավանականությունների տեսությունները: Հասարակական գիտությունների և սոցիալական վերլուծության հետազոտությունները ցույց են տալիս մաթեմատիկական վիճակագրության մեթոդների խիստ անհրաժեշտություն որպես «օգտակար գործիք»:

3. Մաթեմատիկայի կարևոր արժեքներից մյուսը նրա կիրառությունն է տնտեսագիտության մեջ, տնտեսագիտական երևույթների և գործընթացների վերլուծության ու մոդելավորման ընթացքում, թույլ տալով ուսումնասիրել տնտեսական կյանքում առկա կապերը, զարգացման դինամիկան:

Մաթեմատիկայի առավել ակնհայտ և օգտակար կողմերից մեկը դրա գործնական կիրառումն է առօրյա կյանքում: Օրինակ՝ ֆինանսական կառավարման համար անհրաժեշտ են թվաբանության տարրական գիտելիքներ՝ սկսած բյուջեի պլանավորումից մինչև վարկերի և ներդրումների հաշվարկներ: Մտածեք բնորոշ իրավիճակ. երեխան ցանկանում է նոր խաղալիք գնել, բայց նրա գրպանի փողը չի բավականացնում: Այստեղ է, որ օգնության է հասնում մաթեմատիկան: Ծնողները կարող են խնդրել իրենց երեխային հաշվարկել, թե որքան պետք է խնայեն կամ որքան ժամանակ կպահանջվի պահանջվող գումարը խնայելու համար: Սա ոչ միայն սովորեցնում է երեխային ֆինանսական գրագիտության հիմունքները, այլև զարգացնում է պլանավորելու և որոշումներ կայացնելու նրա կարողությունը:

4. Մաթեմատիկան մեծ կիրառություն ունի առողջապահության բնագավառում, գործիքների և սարքավորումների պատրաստման, դեղագործության չափաքանակի օգտագործման մեջ:

5. Անգնահատելի է մաթեմատիկայի դերը ֆիզիկայի, քիմիայի, աշխարհագրության, կենսաբանության մեջ, համակարգչային և մնացած գիտություններում:

Ֆիզիկա՝ դեռևս անհիշելի ժամանակներից բնությունը առաջադրել է խնդիրներ որոնց բացատրությունը և լուծումը վեր է եղել մարդկանց մտավոր հնարավորություններից: Անձրեն ու քամին, արևի խավարումն ու կայծակը և նմանատիպ այլ երևույթներ բացատրվել են հեքիաթների, առասպելների և կրոնական տեսանկյուններից: Բայց և եղել են ոլորտներ որտեղ հնարավոր է դարձել ճշգրիտ մոտեցումը: Դրանք հիմնականում վերաբերել են այնպիսի երևույթների, որոնք բնութագրվում են երկարությամբ, ժամանակով զանգվածով և ֆիզիկական այլ մեծություններով և որոնց չափումը արտահայտվում է մաթեմատիկայի միջոցներով: Մաթեմատիկական հաշվարկներն օգնում են ֆիզիկոսներին որոշել և բացատրել շրջակա միջավայրի օրենքները. Ֆիզիկա և մաթեմատիկա բնականաբար հասկանալու համար մոդելավորել բացասական թվեր, գործակիցներ, վեկտորներ և այլն և բացատրել այն գործընթացների և առարկաների իրականությունը, որոնք ուսումնասիրում է ֆիզիկան [3]: Մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի շարունակական կապն ապահովում է մաթեմատիկական հմտությունների գործնական կիրառում: Այն ձևավորում է:

Քիմիայում կամ քիմիական երևույթներում մաթեմատիկայի մասնակցությունը սկսվում է նյութի մոլեկուլային կամ քիմիական բանաձևից, որը որոշվում է նյութում պարունակվող քիմիական տարրերի ատոմական հարաբերություններով, որոնցից էլ կախված է նյութի տեսակը: Քիմիայի դպրոցական դասընթացում դիտարկվում են բազմաթիվ քիմիական խնդիրներ, որոնք լուծվում են տոկոսների, հավասարումների կամ մաթեմատիկայի այլ կիրառությունների միջոցով: Քիմիայում լայնորեն կիրառվում է մաթեմատիկայի այնպիսի առանցքային գաղափար, ինչպիսին համաչափությունն է: Քիմիկոսների համար մաթեմատիկան առաջին հերթին օգտակար գործիք է բազմաթիվ քիմիական խնդիրների լուծման համար: Շատ դժվար է գտնել մաթեմատիկայի որևէ ճյուղ, որը չօգտագործվի քիմիայում: Փունկցիոնալ վերլուծություն և խմբերի տեսությունը լայնորեն կիրառվում են քվանտային քիմիայում, հավանականությունների տեսությունը կազմում է վիճակագրական թերմոդինամիկայի հիմքը, գրաֆիկների տեսությունը օգտագործվում է

օրգանական քիմիա բարդ օրգանական հատկությունների կանխատեսման համար մոլեկուլները, դիֆերենցիալ հավասարումները քիմիական կինետիկայի հիմնական գործիքն են, քիմիական թերմոդինամիկայի մեջ կիրառվում են տոպոլոգիայի և դիֆերենցիալ երկրաչափության մեթոդները: «Մաթեմատիկական քիմիա» արտահայտությունը հաստատապես հաստատված է և մտել է քիմիկոսների լեքսիկոն:

Մաթեմատիկական ընկած է համակարգչային գիտության կամ ինֆորմատիկայի հիմքում և առանց մաթեմատիկայի այդ գիտությունը չի կարող գոյություն ունենալ: Այստեղ մաթեմատիկայի տարբեր բաժիններ տարբեր կերպ են օգտագործվում ինֆորմատիկայում: Կարևորագույններից մեկը այստեղ երկուական մաթեմատիկան է: Այն կազմված է 0 և 1 թվանշաններից, դրանց վերջավոր հաջորդականություններից և թվաբանական գործողություններից: Կենսաբանություն: Դեռևս հնագույն ժամանակներում մարդու գոյատևման համար կենդանի աշխարհի մասին անհրաժեշտ իմացությունը կապված է եղել նաև չափման, կարգի և ձևի վերաբերյալ պարզագույն գիտելիքների հետ: Թեև Անտիկ Հունաստանի մտածողները իրենց ստեղծագործություններում մեծացրին բույսերի և կենդանիների մասին իմացությունը, սակայն դրանցում, ըստ էության, բացակայում են քանակական վերլուծությունները: Վերածննդի շրջանում մեծ ուշադրություն դարձվեց մարդու մարմնի կազմությանը, նրա մասերի քանակական հարաբերություններին: Լեոնարդո Դա Վինչին նման հարաբերությունները առաջադրեց որպես մարդու դեմքի և մարմնի գեղեցկության չափանիշ:

Եկեք նայենք մաթեմատիկայի և աշխարհագրության կապին, որը գոյություն ունի բազմաթիվ մակարդակներում և կարևոր դեր է խաղում մեր մոլորակը հասկանալու և ուսումնասիրելու գործում: Սկսած աշխարհագրության սկզբնավորումից՝ նրա տեղեկատվության, գիտելիքների կուտակման և ներկայացման կարևորագույն միջոցներից մեկը եղել է մաթեմատիկան: Եվ առանց մաթեմատիկայի աշխարհագրությունը ի գործու չէ արտահայտելու, լուծելու այն խնդիրները, որոնց համար ինքը կոչված է: Նման խնդիրներից կարևորագույնը հավանաբար կետի դիրքի որոշումն է երկրի վրա: Սա այն հիմքն է, որ հնարավորություն է տալիս իրագործել նավարկությունը ծովերում և օվկիանոսներում, ուսումնասիրություններ կատարել երկրի ցանկացած վայրում [3]: Մաթեմատիկական աշխարհագրությանը տրամադրում է տարբեր աշխարհագրական երևույթներ վերլուծելու, մոդելավորելու և կանխատեսելու գործիքներ: Ամենաակնառու օրինակներից է քարտեզագրությունը՝ քարտեզներ ստեղծելու և ուսումնասիրելու գիտությունը: Քարտեզներ ստեղծելիս աշխարհագրական տեղեկատվությունը ճիշտ ներկայացնելու համար պահանջվում են մաթեմատիկական մեթոդներ և հասկացություններ: Օրինակ, կանխատեսումները թույլ են տալիս վերափոխել Երկրի եռաչափ մակերեսը քարտեզի վրա երկչափ պատկերի: Քարտեզագրության մեջ լայնորեն կիրառվում են նաև տարբեր դասակարգումներ և կոորդինատային համակարգեր: Մաթեմատիկայի և աշխարհագրության միջև կապի ևս մեկ օրինակ է գեոստատիկան: Այս գիտությունը զբաղվում է տարբեր ֆիզիկական և աշխարհագրական երևույթների տարածական բաշխման վերլուծությամբ և կանխատեսմամբ, ինչպիսիք են կլիման, երաշտը կամ ջրի աղտոտումը:

6. Մաթեմատիկական մարզում է հիշողությունը, կերտում բնավորությունը, խնդիրները ճիշտ լուծելու համար անհրաժեշտ է ուշադրություն, հաստատականություն, պատասխանատվություն և ճշգրտություն:

7. Երաժշտական ստեղծագործության մեջ նույնպես կարևոր դեր է խաղում մաթեմատիկան: Օրինակ, համակարգչային երաժշտական ծրագրերը օգտագործում են մաթեմատիկական ալգորիթմներ՝ ձայներ ստեղծելու և փոփոխելու համար: Մաթեմատիկական օգտագործվում է նաև երաժշտական գործիքների թյունինգի մեջ, ինչպիսիք են կիթառները և դաշնամուրները, որոնք

ունեն որոշակի թվով ֆրետներ և ստեղներ՝ կարգավորված մաթեմատիկական սկզբունքների համաձայն:

Այսպիսով, մաթեմատիկական առկա է ամենուր և այդ հարաբերություններում մաթեմատիկայի մասնակցությունը հիմնականում պայմանավորված է նրա կիրառմամբ: Մաթեմատիկական դարձել է պետությունների հզորացման չափանիշ և շարունակում է արդիական մնալ մաթեմատիկայի կիրառության արժեքը: Եվ իզուր չէ պատմության մեջ ամենակարևոր և հիշվող դեմքերից մեկի՝ Նապոլեոն Բոնապարտի հանրահայտ գնահատականը՝ «Չի կարող լինել հզոր երկիր առանց հզոր մաթեմատիկայի»:

Կատարել են նաև հարցումներ ուսուցիչների և աշակերտների շրջանում մաթեմատիկայի գործիքային կամ նպատակային արժեք լինելու վերաբերյալ: Հարցման տվյալները և արդյունքները ներկայացված են հետևյալ աղյուսակում:

|    |                         | Գործիքային արժեք | նպատակային արժեք | Գործիքային և նպատակային արժեք |
|----|-------------------------|------------------|------------------|-------------------------------|
|    | <b>Ուսուցիչներ</b>      |                  |                  |                               |
| 1. | Այլ առարկաների -10 հոգի | 6                | 2                | 2                             |
| 2. | Մաթեմատիկայի -10 հոգի   | -                | -                | 10                            |
|    | <b>Աշակերտներ</b>       |                  |                  |                               |
| 3. | 8-րդ դասարան -10 հոգի   | 10               | -                | -                             |
| 4. | 9-րդ դասարան-10 հոգի    | 7                | 2                | 1                             |
| 5. | 10-րդ դասարան-10 հոգի   | 6                | 1                | 3                             |
| 6. | 11-րդ դասարան-10 հոգի   | 4                | 3                | 3                             |
| 7. | 12-րդ դասարան-10 հոգի   | 3                | 2                | 5                             |

Հարցման արդյունքների վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ ոչ մաթեմատիկական առարկաների ուսուցիչների համար մաթեմատիկական միայն գործիքային արժեք է, ինչը պետք է բնական համարել, նկատի ունենալով մաթեմատիկայի կիրառությունը այլ ուսումնական բնագավառներում: Մաթեմատիկայի ուսուցիչների համար մաթեմատիկական և՛ գործիքային է, և՛ նպատակային: Աշակերտական մոտեցումներում մաթեմատիկական գործիքային է ցածր դասարանների աշակերտների համար, և կրթական աստիճանների բարձրացմանը զուգընթաց նվազում է մաթեմատիկայի գործիքային նշանակությունը, ավելանում՝ նպատակայինը: Դա նույնպես բացատրելի է, քանի որ արդեն ավագ դպրոցում մաթեմատիկական դառնում է նպատակ կրթության շարունակության համար::

### Գրականության ցանկ

1. Հ. Ս.Միքայելյան, Մաթեմատիկական կրթության արժեքաբանական հիմունքները Մաս 1-ին, Արժեքներ և արժեքային հարաբերություններ: Էդիթ Պրինթ 2018թ:

2. Հ. Ս. Միքայելյան, Հանրահաշվի դասագիրք 8-րդ դասարանի համար: Էդիթ Պրինթ 2024թ.
3. Հ. Ս. Միքայելյան, Գիտությունների թագուհի՛, թե՛ պարզապես Թագուհի... Էդիթ Պրինթ 2023թ
4. Ս. Է. Հակոբյան, Երկրաչափության դասագիրք 10-րդ դասարանի համար: Զանգակ հրատարակչություն 2024թ
5. Алексей Барабаишев, Математика как инструмент социальных исследований: Философско-литературный журнал «Логос» 2023.

## ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ՈՐՊԵՍ ԳՈՐԾԻՔԱՅԻՆ ԱՐԺԵՔ Արգարյան Մամիկոն Արմենակի

**Ամփոփում:** Աշխատանքում մաթեմատիկան դիտարկվում է որպես գործիքային արժեք: Յույց է տրվում, որ մի կողմից այն ծառայում է որպես աշխարհընկալման, պահանջմունքների բավարարման, նպատակների իրականացման, համոզմունքների ձևավորման, ճշմարտային, գեղագիտական, բարոյական, հոգեկան, ազգային ու համամարդկային արժեքների ձևավորման կարևոր աղբյուր: Մյուս կողմից այն ծառայում է որպես գործիք սոցիալ-իրավական տեղեկատվական համակարգում տեղեկատվության հավաքագրման և փոխակերպման առօրյա կյանքում, գործընթացներում, տնտեսագիտության, առողջապահության մեջ, զանազան գիտություններում՝ ֆիզիկայում, քիմիայում, աշխարհագրության, կենսաբանության, առողջապահության և այլ գիտությունների մեջ: Կանգ է առնվում մաթեմատիկայի՝ որպես սովորողի հոգեկան զարգացման գործում որպես գործիք ծառայելու հարցի վրա: Դիտարկվում է նրա դերը բնավորության, ուշադրության, կամային առանձին որակների և հոգեկան այլ գործընթացների ձևավորման հարցերի վրա: Զննարկվում է նաև մաթեմատիկայի դերը որպես գործիք երաժշտության բնագավառում:

**Բանալի բառեր:** մաթեմատիկա, արժեք, գործիքային արժեք, մաթեմատիկայի կիրառություններ:

## МАТЕМАТИКА КАК ИНСТРУМЕНТАЛЬНАЯ ЦЕННОСТЬ Абгарян Мамикон Арменакович

**Резюме.** В данной работе математика рассматривается как инструментальная ценность. Показано, что, с одной стороны, она служит важным источником мировоззрения, удовлетворения потребностей, реализации целей, формирования убеждений, формирования истины, эстетических, нравственных, духовных, национальных и общечеловеческих ценностей. С другой стороны, она служит инструментом сбора и преобразования информации в социально-правовой информационной системе, в повседневной жизни, в экономике, здравоохранении, в различных науках: физике, химии, географии, биологии и других. Также обсуждается роль математики как инструмента в области музыки. Сделан акцент на роли математики как инструмента в умственном развитии учащегося. Рассматривается ее роль в формировании характера, внимания, индивидуально-волевых качеств и других психических процессов.

**Ключевые слова:** математика, ценность, инструментальная ценность, приложения математики.

## **MATHEMATICS AS AN INSTRUMENTAL VALUE**

**Abgaryan Mamikon Armenakovich**

**Summary.** In this paper, mathematics is considered as an instrumental value. It is shown that, on the one hand, it serves as an important source of worldview, satisfaction of needs, realization of goals, formation of beliefs, formation of truth, aesthetic, moral, spiritual, national and universal values. On the other hand, it serves as a tool for collecting and transforming information in the socio-legal information system, in everyday life, in economics, healthcare, in various sciences: physics, chemistry, geography, biology and others. The role of mathematics as a tool in the field of music is also discussed. Emphasis is placed on the role of mathematics as a tool in the mental development of a student. Its role in the formation of character, attention, individual-volitional qualities and other mental processes is considered.

**Keywords:** mathematics, value, instrumental value, applications of mathematics.

**Получено в редакцию - 10.09.2024**

**Рецензирована – 03.02.2025**

**Отправлен на сайт – 12.06.2025**

# ОБЪЕКТИВНЫЕ ПРИЗНАКИ НАУЧНОГО ПРЕКРАСНОГО В МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

ORCID 0000-0001-5387-1115

Гамлет Суренович Микаелян  
АГПУ им. Х. Абоаяна



*Միքայելյան Հ.Ս. . մանկ. գիտ. դոկտոր,  
Ֆ.մ.գ.թ., պրոֆեսոր*

## ВВЕДЕНИЕ

С момента первых шагов и до конца своих дней человека привлекает одна важная особенность вещей и явлений, которая, по словам французской энциклопедии «Лариус», «радует глаз и ум». Эта исключительная особенность на протяжении веков характеризовалась прилагательным «прекрасное». Не менее значимым в жизни человека имеет знание количественных соотношений, размеров, форм и порядков предметов и явлений окружающего мира, что и составляет содержание математики. Хорошо известно роль математики в научно-техническом развитии, в прогрессе человечества в целом. И вполне естественно выяснение вопроса о красоте математики: прекрасна ли математика, могут быть красивыми ее объекты, “радовать глаз и ум” и участвует ли математика в формировании красоты?

Ответ на вопрос о красоте математики, кажется, дается в эстетических характеристиках математических объектов, таких как «красивая теорема», «красивое доказательство», «красивая задача» и т. д. Примеры участия математики в формировании прекрасного могут дать нам расположение картины, висящей на стене и расположение ученических парт в школьном классе. Наклоните картину или нарушите параллельность парт в классе и ваш глаз не будет радоваться. Другими словами, математическое понятие параллелиности участвует в формировании красоты. Однако помимо предложенных простых примеров есть и более глубокие и более надежные пути для нахождения ответов на поставленные вопросы.

Хотя вопрос прекрасного в науке рассматривался еще в древности - Платон уже говорил об учениях о прекрасном, но конкретные исследования о научном прекрасном впервые встречаются в 18-ом веке у шотландского философа Френсиса Хатчесона (Francis Hutcheson, 2004). Как Хатчесон, так и последующие исследователи предлагают некие признаки научного прекрасного и пытаются оценить эстетическую привлекательность научных объектов, исходя из их соответствия признакам, отмеченными ими. Сам Хатчесон предложил три признака прекрасного в науке -

единство разнообразий, общность научной истины и познание неочевидной истины (Francis Hutcheson, 2004). Его идеи произвела большое влияние на дальнейшее развитие эстетической мысли. В этом направлении своими работами выделились Дэвид Хьюм, Адам Смит, Иммануел Кант и другие. Анри Пуанкаре, в качестве эстетического признака, выделяет гармоничность и неожиданность выявления математических объектов (H. Poincaré, 1956). Георг Биркгоф предлагает определенную формулу для мер оценки математического прекрасного:  $M = O/C$ , где  $M$  - мера красоты предмета,  $O$  - мера его порядка, а  $C$  – мера тех усилий, которые применяются для понимания сущности этого предмета (G. D. Birkhoff, 1956). Некоторые авторы оспаривают присутствие деления в этой формуле. А психолог Ганс Айзенк предлагает заменить формулу Биркгофа следующей формулой:  $M = O \cdot C$ , так как он считает, что чем больше усилий затрачивается на понимание математических закономерностей, тем больше полученное от этого удовольствие (H. Eysenck, 1972). Искусствовед В. М. Волькенштайн предлагает другие признаки прекрасного в науке: сведение сложного к простому, эстетическое впечатление появляется только преодолением целенаправленного, трудного и сложного препятствия, четкая и гармоничная математическая формулировка научного достижения (В. М. Волькенштейн, 1931). (Вейль А. 1952) утверждает, что красота тесно связана с симметрией. П. Дирак таким признаком считает математическая запись фундаментальных законов природы (P. Dirac, 1977). (Г. И., Саранцев, 2003) в качестве признаков появления прекрасного в содержании математики, принимает порядок, логическую строгость, ясность, общность ее применения в разных разделах математики, своеобразие, неожиданность. Порядок считают эстетическим признаком также (P. Davis, R. Hersch, 1981). (М. С Якир, 1989) ссылается на красоту математической задачи и в качестве признаков, характеризующих красивую задачу, предлагает непредсказуемость, неожиданность, ясность, присутствие революционного шага, оптимистичность, работу. (О. А. Кобелия, 1985) обуславливает эстетическую привлекательность математической идеи ее общностью и применяемостью. (В. Г. Болтянский, 1982) предлагает характеризовать красоту математического объекта /формулы, задачи, теоремы и т.д./ изоморфизмом этого объекта или его наблюдательными моделями и неожиданностью ее появления. Согласно Болтянскому:

Красота = изоморфизм + ясность + неожиданность.

(T. Dreyfus,; T. Eisenberg, ,1986) обуславливает эстетическую привлекательность простотой, лаконичностью и ясностью, а (W. Ebeling, J.Freund, F. Schweitzer,1998) прекрасное связывают со сложностью; сложность необходима, хотя и недостаточна, для эстетики.

В работах, посвященных научному прекрасному, не проводится классификация признаков научного или математического прекрасного. В работах (Г.С. Микаелян, 2014, 2016, 2019). мы подразделяем признаки научного прекрасного по их объективным и субъективным характеристам, что расширяет возможности восприятия прекрасного. Мы подразделяем их по объективному и субъективному характеру, что расширяет возможности восприятия прекрасного.

Часть признаков научного прекрасного относится к объектам той или иной научной области: они являются признаками объекта. Таковыми являются симметрия, гармония, оптимальность, логическая строгость, четкость и т.д. Например, симметрия – признак разнообразных объектов математики, физики, химии и других естественных наук, логическая строгость – признак научной мысли и т.д. Подобные признаки мы называем объективными признаками научного прекрасного. Другая часть признаков научного прекрасного соотносится с субъектом и мы их здесь не рассматриваем.

Объективные признаки научного прекрасного, в свою очередь можно разделить на части. Первую группу объективных признаков научного прекрасного составляют образующие элементы природы: порядок, симметрия, сравнение, гармония, ритм, оптимальность, стабильность, применяемость. Назовем эти признаки образующими признаками научного прекрасного. В случае с математикой эти признаки выражают свойства прикладных объектов математики, применяемые как в математике, так и разных областях науки и образования.

Вторая группа признаков, которую составляют четкость, ясность, приведение сложного к простому, логическая строгость, относится к научному языку. Эти признаки свою эстетическую привлекательность особенно ярко выражают в математике и логике. Назовем их логическими признаками научного прекрасного.

Третью группу признаков составляют общность, единство разнообразий, математическая запись научной закономерности, оригинальность, революционный шаг. Это те признаки, которые объединяют научные объекты, по этой причине назовем их признаками объединения научного прекрасного.

Настоящая работа посвящена объективным признакам научного прекрасного, их роли в решении вопросов, поставленный выше.

## **Прекрасное**

На протяжении веков человечество волновало прекрасное, человеку не давало покоя желание познать тайны прекрасного. Еще в XXV в до н.э. в шумерских летописях рассматривается вопрос взаимоотношения прекрасного и полезного: сократовский подход – «прекрасное – это наиболее полезное», за несколько тысяч лет до него принимали шумеры. Руководствуясь этим же подходом, древние египтяне приписывали красоту Нилу потому, что он «несет хлеб и еду».

Прекрасное – один из основных предметов античной греческой мысли. Пифагор и пифагорейцы считали, что небо, вся Вселенная – это гармония и число, а прекрасное – мера гармонии и оно выражается некими отношениями чисел. Гераклит считал, что прекрасное относительно, так как «самая прекрасная обезьяна безобразна в сравнении с человеком». Сократ обуславливал прекрасное полезным: «корзина с навозом прекрасна, если она полезна». Прекрасное – один из высших идеалов Платона. Это следует не из историко-общественного опыта, а имеет идейное, духовное начало. Прекрасное материального преходяще и относительно, в то время как, настоящая красота вечна, постоянна, не относительна. «Она не рождается, не уничтожается, не уменьшается, не может быть то красиво, то безобразно, здесь быть прекрасно, там – безобразно, чем-то быть прекрасным, а чем-то безобразным, для кого-то быть прекрасным, для кого-то безобразным» (С. В. Котина, 1989). Для Платона это вечная идея, чему чужд переменчивый мир вещей. Аристотель считал, что прекрасное – это качество, объективное свойство предметов, явлений. Среди этих свойств он выделяет величину, сравнение и порядок, для изучения которых необходимо обратиться к математике. Прекрасное – не великое, и не малое, оно выступает в качестве меры, а мера всего – человек, с которым и должны сравниваться все предметы.

Средневековые мыслители Аврелий Августин и Фома Аквинский источник прекрасного видели в Боге. Чувственное прекрасное и получение от него удовольствия отцы церкви считали грехом.

В эпоху Возрождения восстановились и продолжились обычаи античной эпохи о представлениях прекрасного. Прекрасным считались природа, натуральное, радость ее восприятия, а идеалом прекрасного был человек и, в первую очередь, тело человека. Одновременно принималась также относительность прекрасного, в его определении важным считалась роль сравнения. Лука Пачоли, в качестве нормы прекрасного представил золотое сечение. В эту эпоху прекрасное связывалось с нравственным, справедливым и истиной: «прекрасное прекрасно в сто раз больше, если оно короновано драгоценной истиной», - говорит Уильям Шекспир.

В эпоху классицизма прекрасное сводится к элегантности. Прекрасным считается не вся природа, а цель искусства - отражение этого прекрасного, хотя с помощью искусства можно красиво изобразить даже безобразное.

В эпоху просвещения прекрасное рассматривается как звено, связывающее разум с чувствами. Франсуа Вольтер считал прекрасное свойством объектов природы, таких как вес, цвет, объем. Дени Дидро различает два вида прекрасного: действительное, объективное прекрасное, которое существовало также до человека, и относительное прекрасное, которое существует только для человека. Он считает, что прекрасное принимают не разумом, а чувством. Йоган Винкельман сущность прекрасного объясняет свойствами предметов, их цветом, симметрией и ритмом. Он считает, что прекрасное – это цель искусства и его центр, оно формируется и развивается с помощью воспитания и образования (И. И. Винкельман, 1890).

Немецкая классическая философия внесла новые идеи восприятия прекрасного. Иммануил Кант считает, что прекрасное появляется только тогда, когда очищается от материального содержания. Согласно Фридриху Шиллеру прекрасное – это свобода, а его основа – ясность. Он разделяет изображение прекрасного и прекрасное изображение. Георг Гегель считает, что прекрасное – чувственное явление и второстепенно в сравнении с истиной: насколько глубоко думает человек, настолько меньше ему необходимо прекрасное. Прекрасное, в первую очередь, относится к области искусства, а прекрасное природы предшествует ему.

Как видим, у мыслителей прошлого нет единого подхода к вопросу прекрасного. Платон говорит: «Очень легко найти пример прекрасного, но очень трудно объяснить, почему они прекрасны». А Альбрехт Дюрер признается: «Я не знаю, что такое прекрасное». Один из величайших эстетов классицизма Йоган Винкельман считает: «Красота - одна из больших тайн природы. Ее все видят и чувствуют, многие пытались дать представление о ее сущности, но всегда безрезультатно» (И. И. Винкельман, 1890).

На самом деле трудно выявить сущность прекрасного. Например, какое сходство есть между прекрасным видом природы, щебетаньем птицы и поведением юноши, помогающему старику, если все это характеризуются прекрасным?

Естествоиспытатели считают, что прекрасное – объективная закономерность, которая рождается в недрах природы, но они не могут ответить на вопрос: «Почему светская красавица не нравится простолюдину, а дородная, пышущая здоровьем жительница деревни не по вкусу скрупулезному снобу?» Обществоведы считают прекрасное результатом человеческого творчества, но не могут объяснить свое очарование морскими или горными пейзажами, которые прекрасны, но не являются результатом человеческого творчества. Истиной, возможно, является золотая середина: прекрасное имеет как природную, так и человеческую, общественную основу (А. В. Волошинов, 2000),

Однако истинно то, что прекрасное неразрывно с жизнью человека. Для сохранения бытия и вида в разнообразии предметов и явлений человеческие инстинкты имеют широкие возможности

выбора, что они и делают, исходя из такого соединения порядка и хаоса, симметрии и асимметрии, движения и неподвижности, простого, сложного и полезного, которое характеризуется как прекрасное. И для выбора человеку дано то чувство прекрасного, тот вкус, которые дают возможность юноше найти и выбрать в своем окружении из многочисленных девушек ту единственную, которая станет матерью его детей. Именно это чувство прекрасного делает ценным для человека окружающий мир, предметы и явления, жизнь в целом.

В своей прекрасной книге (А. В. Волошинов, 2000), автор представляет волнующий пример размышлений о расставании с жизнью: «великий поэт Генрих Гейне, доживавший последние минуты жизни, собрав последние силы, направился к Лувру и долго стоял перед мраморной статуей Венеры. “Неужели я больше не увижу это чудо?” - подумал поэт» Другой художник – армянский композитор Дживани попрощался с жизнью, произнеся: «Неужели я больше никогда не услышу песни Ширина?» Оба художника ценность жизни, горечь ее потери обуславливали с прекрасным, с трудностью расставания с прекрасным и, казалось, подтверждали слова Федора Достоевского: «Без прекрасного человек, возможно, не захотел бы жить в этом мире».

### **Образующие признаки научной эстетики в процессе обучения математике:**

#### **Порядок**

Порядок во все времена считался основным принципом организации в природе. Он противопоставлялся хаосу и рассматривался в качестве источника красоты. В античные времена порядок в первую очередь связывался со Вселенной. «Вероятно, первым, кто заговорил о космическом/Вселенском порядке, был Пифагор, причем, пифагорейцы подтверждением» такого порядка считали числа (А. Аврелий, 2017). Платон использовал идею порядка в процессах формирования всех областей эстетической, социальной, государственной жизни, человеческого тела, души. Концепции порядка большое внимание уделял Аристотель. Он приписывал порядок, в первую очередь, числам и связывал его с эстетикой, исходя из того, что «... самые главные формы прекрасного, это – порядок, соразмерность и определенность, – математические науки больше всего и показывают именно их. И так как эти стороны, очевидно, играют роль причины во многих случаях ..., отсюда ясно, что указанные науки могут в известном смысле говорить и про причину такого рода – причину в смысле прекрасного» (Ю. Б. Боров, 1960). Прекрасное у Аристотеля не отождествляется с благом, которое «... всегда выражено в действии, между тем прекрасное бывает и в вещах неподвижных ..., поэтому те, по словам которых математические науки ничего не говорят о прекрасном или о благом, находятся в заблуждении» [там же]. На самом деле именно математика говорит о прекрасном, выявляя «важнейшие виды прекрасного – слаженность, соразмерность, и определенность» (Ю. Б. Боров, 1960).

Создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики Рене Декарт считал, что «порядок освобождает мысль», а пионер архитектурного модернизма и функционализма XX ст. ле Корбюзье убеждал современников: «... гармония формы, интенсивно воздействует на наши чувства, вызывая эстетические эмоции и эмоциональный отклик ..., пробуждает в нас глубокие резонансы, задавая меру порядка, которая помогает нам понять красоту» (Le Corbusier, 1923). И «насколько идеален порядок, настолько спокойно и уверенно чувствует себя человек» [там же]. И естественна колоссальная роль порядка и его эстетики в

математике, который выступает также языком золотой книги природы, способом выражения ее закономерностей. По Норберту Виннеру наивысшим призванием математики является нахождение порядка в окружающем нас хаосе. И не только математика, но и наука в целом имеет предначертанием признавать реальность, искать и утверждать порядок в хаосе мира. Однако, в отличие от других наук, порядок в математике выступает не только в качестве исследовательского инструмента, но также является одним из основных принципов формирования содержания.

В качестве принципа формирования порядок в той или иной мере выступает в самых различных областях математики. Во-первых, в самом общем виде порядок определяется в произвольном множестве, что служит ключом одной из основополагающих идей современной математики, давшей начало теории упорядоченных множеств. Затем, на основе порядка строится одно из интереснейших направлений современной алгебры – теория структур. В единстве порядка и алгебраических операций берет начало теория упорядоченных алгебраических систем (теория упорядоченных групп, колец и т.д.) – еще одно интересное направление современной алгебры.

Идея порядка позволяет определить одно из важнейших понятий математического анализа – последовательности. Это понятие также лежит в основе математической индукции, одного из базовых математических методов выявления истины. Отметим еще, что в математике порядок находит самое простое и важное свое проявление в идее упорядоченных пар, а последняя лежит в основе таких фундаментальных понятий, как эквивалентность и функция.

Упомянутые выше, а также другие, связанные с порядком, математические теории имеют прикладной характер, и, следовательно, дают возможность исследовать природу. С этой точки зрения незаменимую роль играет порядок, проявляющийся в виде равенства, неравенства и нестрогого неравенства.

Отдельно следует заметить, что в большинстве своем математика представляет собой науку о различных равенствах, неравенствах и их доказательствах. С этой точки зрения порядок выступает математическим исследовательским методом: с его помощью выявляются не только взаимоотношения между математическими объектами, но и закономерности природы. Наконец, равенства и неравенства являются важнейшими инструментами выяснения истины – если научная закономерность представляется в виде равенства или неравенства, то она считается безусловно истиной.

Смежные, либо обусловленные порядком разделы математики существенно не отличаются своей эстетичностью. Лишь следует отметить, что задействование отношения порядка придает исследуемому математическому материалу дополнительные эстетические оттенки. А равенства или неравенства, процессы их исследования и доказательства всегда сопровождаются непредсказуемостью, ясностью, точностью, логической строгостью и другими признаками эстетики математики.

Эстетическая привлекательность математических объектов, обусловленная порядком, присуща исследованиям Джорджа Биркгоффа, Генри Айзенка, Геннадия Саранцева и других. Биркгофф и Айзенк хоть и радикально различным образом подходят к исчислению меры  $M$  усилий в восприятии эстетичности математического объекта ( $C$ ) с использованием формул  $M = O/C$  и  $M = O \cdot C$ , но сходятся в том, что эстетичность объекта обуславливается его порядком ( $O$ ).

В школьном курсе математики порядок также играет ключевую роль и является важным источником эстетической привлекательности соответствующих построений. Фактически порядок является одним из основных принципов компоновки учебного материала. Использование дидактического принципа систематичности и последовательности в изложении материала,

упорядочивание прикладного фона курса (адаптация с математическим материалом), характеристика математических и прикладных объектов посредством отношения порядка – эти и другие подобные процессы демонстрируют ту уникальную роль, которую играет порядок в школьном курсе математики и в процессе ее изучения. При этом реализация функций порядка сопровождается многими объективными и субъективными признаками математического прекрасного, его внутренними и внешними проявлениями (Г. С. Микаелян, 2015).

На протяжении многолетнего процесса обучения с самых первых шагов ученик имеет возможность заметить, что «математика вносит порядок в окружающий нас хаос». Действительно, понятия «право» и «лево», «вверх» и «вниз», «большой» и «маленький» уже являются прекрасными примерами выражения порядка и его эстетического признака, с которыми ученик знакомится еще в первом 30 классе. А использование натуральных чисел? Здесь, наряду с подсчетом, проявляется функция нумерации натуральных чисел, отличающаяся полезностью, применимостью и другими признаками математического прекрасного. Впоследствии идея упорядочивания натуральных чисел распространяется на целые, рациональные и действительные числа, используется для введения понятия числовой прямой, упорядочивания именованных чисел и с помощью последнего прокладывает путь к различным приложениям математики. Все эти процессы сопровождаются полноценными эстетическими проявлениями, сопровождающимися действием эстетических признаков единства многообразий и всеобщности.

В школьном курсе математики, наряду с отношениями равенства и неравенства, порядок выступает в качестве способа «расположения» (упорядочения) учебного материала, определения сущности отношений между понятиями в рамках отдельных разделов и тем, реализации последовательности доказательств и других формах. Так, например, когда мы совмещенно (то есть, на уровне одного и того же множества) изучаем различные действия и отношения, то для введения порядка необходимо наличие определенного «согласования» между используемыми действиями и отношениями. Порядок требует, чтобы, к примеру, при совместном рассмотрении операций сложения и умножения натуральных чисел, между ними было установлено некое «согласование», выражающееся распределительным законом. Появление и утверждение порядка подобным способом является фундаментальным подходом для всех математических структур.

Введение порядка придает дополнительную эстетическую привлекательность объектам и процессам, а также способствует их соответствующему упорядочению в пределах действия других операций. Например, исходя из того, что действия сложения и умножения целых чисел связаны распределительным законом, следует, что действия вычитания и умножения должны быть тоже связаны распределительным законом.

На числовых множествах устанавливается также «согласования» между операциями сложения и умножения и понятиями больше/меньше следующим образом.

Для произвольных целых чисел  $a, b, c$ :

- если  $a < b$ , то  $a + c < b + c$ ;
- если также  $0 < c$ , то  $ac < bc$ .

Аналогичным образом согласуются между собой порядок и операции сложения и умножения на множествах рациональных и действительных чисел. Отмеченный процесс упорядочения можно продолжить также для комплексных числах, например, следующим образом:

$$a + bi < c + di \Leftrightarrow a < c \text{ или } a = c \text{ и } b < d, a, b, c, d \in \mathbb{R}:$$

Упорядочение комплексных чисел можно произвести по модулям и аргументам или многими другими способами. Однако самое интересное заключается в том, что, как бы мы не определяли

порядок, вместе с действиями сложения и умножения комплексных чисел, выше отмеченная связь не может быть осуществлена.

Действительно, предположим, что это возможно, т.е. если  $a < b$ , то  $a + c < b + c$ , а также если  $0 < c$ , то  $ac < bc$ , где  $a, b, c$  – комплексные числа. Сравним комплексные числа  $i$  и  $0$ . Возможны два варианта:  $0 < i$  либо  $i < 0$ . В первом случае получим  $0 \cdot i < i \cdot i$  или  $0 < -1$ . При добавлении 1 к обеим частям последнего неравенства получим  $1 < 0$ , а при умножении обеих его частей на число большее 0, то есть  $-1$ , получим  $-1 < 0$ . В результате приходим к противоречию с неравенством  $0 < -1$ . Нетрудно убедиться и в том, что к противоречию сведется также случай  $i < 0$ .

Таким образом, как бы мы не вводили отношение «меньше» (или «больше») во множестве комплексных чисел, его невозможно будет согласовать с операциями сложения и умножения. Поэтому во множестве комплексных чисел порядок и не вводится.

Эстетическая привлекательность произведенного рассмотрения обусловлена также признаками неожиданности и непредсказуемости научной эстетики. В то же время оно показывает, что эстетический признак единства многообразий не может быть неограниченным, оно может быть распространено только на определенной группе предметов.

Порядок, эстетический подход позволяют приходиться к правильным выводам и решать самые различные методические задачи. Рассмотрим, например, такую важную проблему методики преподавания математики, как проектирование курса алгебры средней школы, и, в частности, определение места расположения материала о неравенствах.

Что касается неравенств, у специалистов нет единого мнения о подходах к их изучению. Некоторые специалисты полагают, что необходимо этот материал излагать в рамках одной темы. Другие, наоборот, считают целесообразным смешение содержания темы с общим алгебраическим материалом. Однако приемлемое решение может быть найдено, исходя из структурных приоритетов проектирования алгебраического материала с учетом практики построения теорий в математической логике (Э. Мендельсон, 2013): основу теории образуют три множества символов: множества предметных и предикатных символов и символов операций. С помощью этих символов сначала определяются термины теории, а затем и формулы. Часть формул принимается в качестве аксиом, из которых затем посредством правил вывода получаются теоремы теории.

Описанный подход носит общий характер и может служить продуктивным ориентиром для построения школьного курса математики – размещения и упорядочения в нем учебного материала. Не вдаваясь в подробности, отметим, что для курса алгебры вопрос выбора множеств символов решается в рамках алфавита алгебры, где наряду с числами, символами греческого и латинского алфавитов, величинами, включается также прикладной фон математики. Алгебраические операции сложения, вычитания, умножения и деления, являющиеся основой операций возведения в степень, извлечения корня и др., выступают в качестве стержней, вокруг которых группируется остальной материал.

В качестве основных понятий и отношений принимаются равенство, порядок (или виды неравенства), принадлежность элемента к множеству и т.д. Рассмотрение каждой из операций строится, исходя из отношений рассматриваемых формул и операций. Например, авторский учебник «Алгебра–7» (Г.С. Микаелян, 1999, 2006). называемый «Азбукой алгебры», состоит из пяти глав. Первая глава озаглавлена «Алфавит алгебры» и посвящена символам алгебры. Во второй главе предлагаются к рассмотрению сложение равенств, сложение неравенств, а также

практические применения сложения. Таким же образом построены и другие главы, посвященные остальным основным операциям алгебры: вычитанию, умножению и делению.

Предлагаемое к изучению содержание отличается эстетической привлекательностью, отражая естественный ход вещей и позволяя помимо порядка включить в процесс обучения также точность, простоту, единство многообразий и другие признаки математического прекрасного.

### **Симметрия**

Представления людей о симметрии формировались в течение тысячелетий. В этих представлениях симметрия выступала как характерный элемент чего-то правильного, прекрасного и совершенного, как выражение определенности, порядка, гармоничного регулирования. Велика роль симметрии в природе: это один из образующих принципов природы, которому подчиняется как живой мир, так и неживой.

Неживой мир, не имея целью движение, под действием сил притяжения всегда стремится принимать более стабильное состояние, чему способствуют различные симметричные структуры. При этом симметрии формирующегося неживого тела подчиняются симметриям среды. Иная картина характерна для живого мира. В нем для существования объекту необходимо сохранять равновесие, двигаться, а, значит – преодолевать действие силы притяжения Земли и других сил, что обеспечивается с помощью соответствующих структурообразующих свойств формы. При решении таких задач между структурными элементами формы задействуются различные сравнения и симметрии. Так, например, для дерева ключевое значение имеет направление силы тяжести. Поэтому дерево тянется вертикально вверх, а симметрии формируются по отношению к оси, проходящей через его ствол. Для животных, кроме направления силы тяжести, важным является также направление их движения. Потому для них характерна зеркальная симметрия, плоскость которой проходит через векторы, имеющие вертикальное направление и направление движения. Такого родсимметрии дают животному возможность не только легко принимать вертикальное положение, двигаться вперед, но также поворачиваться направо и налево. Лучшая из симметрий животного мира – симметрия пятого порядка или поворот вокруг центра на 72 градуса, чем и, в некотором смысле, обусловлено существование животного мира. По этой причине она называется также симметрия жизни. Пятипорядковой симметрией наделены морские звезды, морские ежи, цветки различных растений и многие другие структуры. Симметрия жизни тесно связана со специфичным для животного мира соотношением – золотым сечением, о чем пойдет речь далее.

А почему симметричное сочетается с прекрасным и приятным взору? Симметрию в природе можно встретить всюду, практически на каждом шагу. Постоянное общение с нею делает ее приятной взору. Если, например, попробуем изготовить что-то с применением двух видов симметрий: горизонтальной и вертикальной, то приятным окажется изготовленное с вертикальной симметрией, поскольку именно эта симметрия встречается повсюду. А горизонтальная симметрия встречается лишь в случае отражения в воде какой-либо картины природы.

Симметрия воспринимается человеком как проявление в природе закономерности и порядка, присутствие которых приятно человеку: оно придает ему уверенность. Таким образом, симметрия, воспринимаемая человеком как закономерность, как «внешнее проявление внутреннего порядка», обретает для него эстетическое значение и воспринимается как приятное и прекрасное.

Симметрия, в качестве объективного признака прекрасного, выступает на протяжении всей истории искусства. Она играет значительную роль как в архитектуре и скульптуре, так и в

живописи. Симметрия имеет большое значение в представлении предметов и явлений природы. Она, является важнейшим компонентом прекрасного, стимулирует познание и помогает понимать закономерности природы и воспринимать прекрасное. По этой причине исследованием симметрии занимались физика, химия, кристаллография и другие естественные науки, архитектура, живопись, музыка, хореография и другие области искусства.

Симметрия является также важным математическим понятием и, естественно, предметом исследования. В широком смысле симметрия в математике – бинарное отношение  $\sim$ , которое характеризуется тем, что если объект  $\alpha$  находится в отношении  $\sim$  с объектом  $\beta$ , то объект  $\beta$  также находится в отношении  $\sim$  с объектом  $\alpha$ . Иначе говоря, если имеет место  $\alpha \sim \beta$ , то также имеет место  $\beta \sim \alpha$ . Например, социокультурные отношения «учится в той же школе», «является членом той же семьи», «гражданин той же страны» и т.п. – это симметрии. Однако социокультурные отношения типа «является родителем», «любит», «ненавидит» – не являются симметричными. Симметриями являются также отношения равенства чисел, выражений, фигур, тел, подобия фигур и т.д.

Учитывая базовое значение понятия равенства для математики и для ее школьного курса, а также роль подобия в курсе геометрии, можно с уверенностью сделать вывод, что симметрия, вообще говоря, может стать одной из образующих идей школьного курса математики.

В узком смысле или при более распространенном подходе симметрия трактуется как преобразование множества, сохраняющее различные признаки элементов этого множества. Подобными признаками в геометрии могут быть подобие, длина, совпадаемость (фигур) и т.д., а в алгебре – операции алгебраической структуры, совпадаемость элементов подструктур, корни многочленов и т.д. (Г. С. Микаелян, 2014).

В курсе геометрии общеобразовательной школы в качестве симметрии рассматриваются те движения плоскости или пространства, при которых фигуры отображаются сами на себя. И именно этот вид отображений воспринимается в искусстве как симметрия и имеет большую эстетическую привлекательность и большой потенциал формирования прекрасного. В школьном курсе геометрии в числе подобных симметрий рассматриваются симметрии по отношению к точке и прямой. С их помощью строятся симметрии прямоугольника, ромба и некоторых других фигур. В школьном курсе алгебры «геометрические» симметрии используются при построении графиков функций. Однако же появляются и симметрии алгебраического характера: связанные с видом многочленов, установлением определенных отношений между переменными, корнями.

Присутствие симметрии придает математическому объекту некую красоту. Более того, чем больше этих симметрий, тем более красивым и приятным взору кажется (является) объект. Неправильный треугольник, например, имеет только одну симметрию, задаваемую тождественным преобразованием плоскости. Равнобедренный треугольник, помимо симметрии, задаваемой тождественным преобразованием, имеет еще и симметрию относительно перпендикуляра, проведенного из вершины третьего угла к основанию. Равносторонний треугольник имеет уже шесть симметрий – три поворота вокруг центра на 0, 120 и 240 градусов соответственно и три симметрии относительно трех перпендикуляров, проведенных из каждой его вершины к основаниям. Из этих треугольников более красивым будет казаться правильный треугольник. Среди плоских фигур окружность имеет бесконечное число симметрий, что и обеспечивает ее совершенную красоту. Прямая также имеет бесконечно число симметрий, однако, в отличие от окружности, множество симметрий здесь обеспечивается за счет бесконечности прямой, что делает ее менее привлекательной, чем окружность. Точка плоскости имеет только одну симметрию, симметрию, задаваемую тождественным преобразованием плоскости. По этой

причине рассмотрение в школьном курсе геометрии симметричных фигур придает эстетическую привлекательность, как учебному материалу, так и учебному процессу в целом. Однако надо заметить, что в курсах математики общеобразовательных школ (и сейчас, и в прошлом) полноценно не задействуется учебное и воспитательное (с точки зрения формирования ценностей) значение симметрии. Хотя для этого имеются очень большие возможности.

Проведем лишь несколько общих замечаний в этом направлении.

1) Расширение и углубление границ представлений о симметрии в школьном курсе математики будет способствовать углублению процесса познания вообще, расширению прикладного фона математики не только в природе и в используемых ее науках, но также в различных областях искусства.

2) Понятие симметрии имеет широкие и разнообразные теоретические и прикладные возможности включения в школьный курс математики – с первого до последнего класса.

3) Серьезное присутствие в содержании школьного курса математики идеи симметрии может дать дополнительные возможности единства и эстетической привлекательности математики, повысить интерес учащихся к ее изучению.

4) Симметрия может выступать в качестве интегрирующей идеи для ряда учебных предметов общеобразовательной школы. Базовым предметом для 39 реализации этой идеи как нельзя лучше подходит математика, охватывая проявления симметрии в физике, химии, естествознании, биологии, искусстве, литературе.

В работе (А.М. Цатурян, 1991)., например, рассматриваются межпредметные связи физики и математики в контексте симметрии. Понятно, что математическое понятие симметрии, ее различные применения в отмеченных областях настолько широки, что для каждого образовательного уровня можно найти соответствующий материал для интеграции во всех отмеченных областях. 5) Интегрированное изучение идеи симметрии может способствовать процессам формирования мировосприятия, мировоззрения учащихся.

### Сравнение

Сравнение – один из основных приемов мышления, важнейший метод познания. Посредством сравнения мы можем выявить сходство и различие предметов, выявить наличие или отсутствие у них общих свойств. Сравнение также является средством выявления прекрасного, инструментом формирования эстетических ценностей. Не зря говорят, что красота познается в сравнении.

**Золотое сечение.** Хотя симметрия имеет важное значение как компонент прекрасного, надо заметить, что она придает некую неподвижность, окаменелость изображению. Для настоящего прекрасного необходимо сочетание симметричного и асимметричного. Сравнение как раз и дает возможность ответить также на вопрос: «В каком соотношении надо сочетать 40 симметричное и асимметричное для получения прекрасного?» Рассмотрим варианты деления одного и того же отрезка, проиллюстрированные на рисунке ниже.

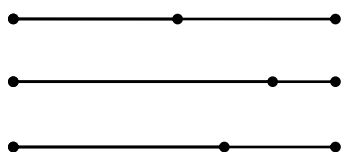


Рис. 1

В первом случае отрезок разделен на две равные части – выполнено симметричное деление, и полученное изображение уравновешенно и одновременно неподвижно. Во втором случае точка деления близка к одной из крайних точек. Получившееся изображение весьма неуравновешенно и неспокойно. И только в третьем случае некая «золотая середина» в соотношении частей обеспечивает желанное единство симметричного и асимметричного, придавая изображению и спокойствие, и движение, и красоту, и не вызывая чувства неподвижности или беспокойства. Приятное взору подобное деление отрезка интересовало мудрецов древнего мира, начиная с египтян. Пифагор называл его золотым сравнением. Найдем его численное выражение. Если отрезок  $a$  разделить на части  $b$  и  $c$  так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

то как раз и получим то, что следует считать золотым сравнением (рис. 2)..

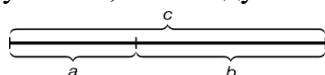


Рис. 2.

Оно во все времена широко применялось в искусстве. Леонардо да Винчи назвал его  *Sectio aurea*, то есть золотое сечение, а Иоган Кеплер –  *Sectio divina* – божественное сечение. Божественное сечение вместе с теоремой Пифагора Кеплер считал двумя сокровищами геометрии. После да Винчи и Кеплера выяснилось, что золотое сечение связано со многими естественными явлениями, закономерностями. Оно широко представлено в животном мире, в частности, строении человека. Будучи законом природы, воплощением божественного промысла, золотое сечение также является законом прекрасного, человеческого творения и встречается в разных цивилизациях, разных эпохах, разных областях искусства. Если в приведенном выше равенстве обозначим  $a = 1$ ,  $b = \varphi$ , то получим также

$c = 1 + \varphi$  и  $\varphi : 1 = (1 + \varphi) : \varphi$  или  $\varphi^2 = \varphi + 1$ , откуда получим

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,6180339887 \dots$$

Это значение числа  $\varphi$ , выражающего золотое сечение. Оно также называется коэффициентом золотого сечения. Можно показать, что коэффициент золотого сечения не рациональное число, то есть оно не может быть равным частному двух целых чисел. В повседневных расчетах обычно пользуются приблизительными значениями иррациональных чисел. Для коэффициента золотого сечения с точностью до 0,001 имеем  $\varphi \approx 1,618$ . Обратное число  $1/\varphi$  (с точностью до 0,001) будет 0,618.

Действительно,  $1,618 \cdot 0,618 \approx 1$ . Число  $\varphi$  также можно представить в виде бесконечной последовательности вложенных квадратных корней вида:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

**Числа Фибоначчи.** Первым в Средневековой Европе и величайшим в свое время математиком был Леонардо Пизанский, известный как Фибоначчи. Леонардо был торговцем в Пизе и, как и другие итальянские торговцы, долго путешествовал на Востоке, был в Египте и Междуречье и, в отличие от своих коллег, вместе с товарами привез оттуда не характерные торговцу, но очень важные другие ценности – математические знания. Эти знания он обобщил в своей книге на латинском языке «*Liber Abaci*» («Книга об абаке»), написанной в 1202 году. Она была

предназначена именно для торговцев и содержала много полезных для того времени знаний об арифметике и алгебре. В этой книге Фибоначчи рассматривает примечательную задачу о кроликах, решение которой стало причиной появления важного математического понятия. Эта задача о кроликах такова.

Один человек помещает пару кроликов в огражденный участок. Сколько пар кроликов окажется там через год, если пара кроликов рождает новую пару раз в месяц, и кролики рожают в первый раз, когда им исполняется два месяца. Решим эту задачу Леонардо. В первые два месяца у нас не будет прироста: останется одна пара. В третьем месяце уже будем иметь две пары кроликов, в четвертом – пять, и в каждом последующем месяце число кроликов будет равняться сумме количеств пар кроликов предыдущих двух месяцев. Таким образом, получим следующую последовательность чисел, названную именем Фибоначчи:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,...

Числа Фибоначчи тесно связаны с золотым сечением и его коэффициентом. Действительно, если мы каждое из них, начиная со второго, последовательно разделим на предыдущее, то получим новую последовательность, члены которой неограниченно приближаются к коэффициенту золотого сечения или, как принято говорить в математике, предел полученной последовательности будет равен коэффициенту  $\phi$  золотого сечения. Эту закономерность впервые заметил Йоганн Кеплер. Эта связь чисел и золотого сечения совсем не случайна: как и золотое сечение, числа Фибоначчи имеют широкое применение в самых разных явлениях природы, искусстве и разных отраслях науки. Можно только удивляться разнообразию этих применений. Исходя из этого, деление на части любого предмета соотношением последовательных чисел Фибоначчи также называют золотым сечением. Однако, в отличие от золотого сечения, которое также называется пифагоровым или иррациональным золотым сечением (так как его коэффициент  $\phi$  иррационален) подобное деление называют рациональным золотым сечением, так как полученные частные являются отношениями целых чисел.

**Сравнения в школьном курсе математики.** Сравнения имеют большое применение, как в математике, так и в ее школьном курсе. На основе сравнения вводятся такие базовые понятия математики, как равенство, уравнение, эквивалентность и неравенство. Сравнение служит основой для формирования важнейшего понятия функции, а также измерения величин. В частности: скорость автомобиля – сравнение пройденного пути и затраченного времени, цена товара – сравнение массы (или количества) продаваемого и количества потраченных на покупку денег и т.д. Вообще говоря, в результате сравнения разнородных величин формируется общее понятие рейта – сравнения двух разнородных величин в виде отношения. Понятие рейта, кроме общности, примечательно также признаками ясности, четкости, единством разнообразий и другими объективными признаками научного прекрасного, что придает учебному процессу большую эстетическую привлекательность (Г.С. Микаелян, 2003, 2014).

Процесс сравнения понятий алгебры и геометрии, включая их свойства, приводит к появлению и применению метода координат, роль которого в математике общепризнана. Превосходными проявлениями сравнения являются синус, косинус, тангенс и котангенс угла или числа, логарифм числа и другие понятия, получаемые посредством сравнения чисел, выражающих глубокие математические закономерности и имеющие большое прикладное значение. Однако, как в математике, так и в ее преподавании, процессы, которым сопутствуют сравнения, наделены также другими объективными и субъективными признаками, что придает этим процессам большую привлекательность.

Отметим также, что термин «сравнение» в математике впервые встречается у Цицерона для выражения связи вида  $a : b = c : d$  между величинами  $a, b, c, d$ . В этом смысле сравнение называется также пропорцией (лат. *proportion* – соотношение, уравнивание частей). Однако заметим, что такие важные виды сравнения, как золотое сечение и числа Фибоначчи со своими прикладными и эстетическими широкими возможностями также имеют право занимать место в школьном курсе математики, откуда они несправедливо выпали.

## Гармония

Гармония является одним из важнейших элементов эстетики и имеет тысячелетнюю историю. Философская и эстетическая мысль в разные времена обращалась к этому понятию, используя разнообразные толкования. Однако до сих пор единого мнения относительно истолкования понятия гармонии не выработано. Потому среди толкований этого понятия можно встретить такие варианты:

- согласованность частей целого, в соответствии с эстетическими законами (Философский энциклопедический словарь, 2010).
- культурное положение, направленное на мировую структуризацию с позиции внутреннего регулирования, на отдельные ее части, а также на человека и понимание его жизни (О.П. Мороз, 1989)
- категория, отражающая естественный характер развития реальности, внутренней и внешней согласованности эстетического объекта, целостность и соразмерность его содержания и формы (Философская энциклопедия, 1960),
- симметрия отдельных частей объекта, слияние различных его компонентов в одно органическое целое (Большой энциклопедический словарь, 2002),
- согласованность частей разъединенного целого, которая диктуется эстетическими законами (Философский энциклопедический словарь, 2010),
- соразмерность частей с целым и друг с другом (Словарь иностранных слов, 2014).

Гармония проявляется повсюду: начиная с Солнечной системы и Вселенной до мельчайших частиц природы, от генов каждого отдельного человека и общественных структур до общества в целом. Одним из замечательных примеров гармоничности природы является гармония между животным и растительным мирами, что проявляется в роли обоих миров в жизни друг друга: растения дышат углекислым газом и выдыхают кислород, животные дышат кислородом и выдыхают углекислый газ. Все научные открытия, законы и закономерности, так или иначе, являются утверждениями гармоний, существующих в мировой структуре. Гармония материального мира определяет закон сохранения материи и ее трансформации; гармония движения – закон инерции; гармония живого и неживого мира – естественные науки; гармония человека и окружающего мира – психологию, физиологию; гармония человека и социума – социологию и другие общественные науки; гармония между Вселенной и 46 человеческого разума – философию, а гармония чувств – искусство.

**Гармония и математика.** Рассмотрение отношений между гармонией и математикой начиналось еще в античный период и прямо или косвенно отражалось на протяжении всей истории эстетики. В античное время Пифагор и пифагорейцы в основу гармонии ставили число и числовые отношения. Без числового отношения невозможно объяснить как золотое сечение, так и гармонию музыки. С их, как и с платоновской, точки зрения, в деле формирования вселенской гармонии

большую роль сыграли равносторонние многогранники и эту гармонию можно выразить посредством числовых сравнений (Лосев, А.Ф., 1965).

В восприятии гармонии большое место математике выделял Аристотель. Размер, величина, порядок, симметрия, с помощью которых Аристотель определял гармонию, также имеют буквальное математическое содержание. В эллинистическую эпоху также выделяли особую роль математики в формировании гармонии. В эстетическом подходе к гармонии стоики выделяли важность роли числовых сравнений в музыке. В этом плане Цицерон обращался ко вселенской музыке, рожденной в процессе движения небесных тел. А Марк Витрувий в основу своей эстетики ставил идею соразмерности (что по своей сути вытекает из гармонии) добавляя к ней вычисляемые математические сравнения. Средневековая эстетика также уделяет значительное внимание отношениям гармонии с математикой. Аврелий Августин в деле формирования гармонии и, в целом, эстетики большое значение отводил числу. В частности, на первый план он выдвигал математическое восприятие музыкальной гармонии [1]. Другой мыслитель раннего Средневековья Боэций свои математические подходы к искусству и к гармонии сводил к числовой гармонии в музыке (Boethius, 1995). Вообще, сведение гармонии к количественным отношениям посредством математических сравнений – самая яркая тенденция средневекового восприятия (толкования) гармонии, что особенно отчетливо просматривалось в музыке (музыка в то время считалась сферой математики). В позднем Средневековье, в особенности в готической архитектуре, математика имела широкое участие. Геометрические фигуры – равносторонний треугольник и четырехугольник – выступали в качестве эстетических формообразующих элементов архитектурных сооружений и создавали уникальность в выражении гармонии. В то же время для Средневековья характерно было теологическое восприятие эстетики и гармонии, представление их как божественных творений, что, однако, было далеко от математических обоснований.

В подходах искусствоведа эпохи Возрождения Леона Альберти число либо числовые сравнения, а также ограничения, определяемые геометрическими фигурами, рассматриваются как компоненты архитектурной гармонии. В работах Луки Пачоли, Леонардо да Винчи, Альбрехта Дюрера сравнение и, в частности, золотое сечение как компонент гармонии, используются для идеального представления частей тела человека и получают соответствующее математическое выражение. Это послужило основой для создания перспективы и гармонии посредством нее, что способствовало развитию ренессансной живописи. Готфрид Лейбниц, следуя средневековой традиции, считает, что суть музыкальной гармонии природы содержится в природе числа, и все очарование музыки лежит в числовых отношениях, которые человек чувствует подсознательно. «Музыка для души – это арифметическое упражнение, при этом, душа не осознает, что она занята исчислениями самого себя». Он считает, что на основе 48 математики появляются гармонии в других формах искусства, приносящих не только аудиальное или визуальное удовольствие. «Математика – это поэзия гармонии», – заключает Лейбниц. В последствии эстетическая мысль придает больше значение не количественному, а качественному составляющему гармонии, что изрядно снижает потребность в математике в данной области. Однако при этом следует выделить Георга Гегеля, который в своем обширном учении о гармонии представил математическое понимание гармонии, сочетая его с понятиями каноничности и симметрии.

Связь гармонии и математики не ограничивается лишь искусством и эстетическими подходами. Определение Галилео Галилея «книга природы написана на языке математики» является, вероятно, лучшей характеристикой гармонии математики с природой. Сегодня невозможно представить себе природу, естественные науки и исследования техники без

математики. Причиной является наличие гармонии. Именно она послужила для Владимира Волькенштейна основой для того чтобы сделать следующий вывод: каждая четкая и последовательная математическая формулировка научных достижений оставляет эстетическое впечатление (В. М. Волькенштейн, 1931). Гармония с природой дает возможность математике и ее мощному аппарату быть вовлеченной не только в естественные и технические, но и социальные науки, а также другие области человеческой жизнедеятельности, делая ее одним из ключевых факторов социального прогресса. Гармония широко проявляется и в математике, становясь одним из наиболее важных принципов эстетической привлекательности ее архитектурной структуры. Число, сравнение, размер, величина, геометрическая фигура, симметрия и другие математические понятия, участвующие в создании гармонии, придают эстетическую привлекательность объектам и явлениям природы и искусства не только потому, что «книга природы написана на языке математики», но и потому, что сама эта математическая книга написана красиво (если не сказать «логично красиво»).

Одним из основных принципов, лежащих в основе этой красоты, является гармония между математическими объектами. Но необходимо заметить, что гармония в математике отнюдь не сводится лишь к математической гармонии, отражающей количественные выражения вещей и явлений или же к их сущностное проявление. Все математические теоремы – это проявление внутренних связей между объектами, закономерностей или же гармоний. И что удивительно, изначально обладающая мотивами гармонии с природой математика развивается, исходя из своих собственных законов и закономерностей, в соответствии со своими принципами гармонии. Таким образом создаваемая и генерируемая новая математика находит свое применение в исследовании природы, что, опять-таки, гармонизирует с природой.

Гармония также является одним из основных принципов образования математики. С одной стороны она выражается в беспрецедентной согласованности природы и математики: мысленные абстрактные объекты математики описывают объекты природы, явления и закономерности. С другой стороны, абстрактные ментальные образы переплетаются друг с другом на первый взгляд невидимыми нитями, а их единство создает прекрасную архитектурную структуру, которая еще со времен древних греков имела заветное название «математика». Эта архитектурная структура, как единство внутренних частей и их объединение в целое, соответствует общему для греческого восприятия гармонии. Единство внутренних математических конструкций или частей структуры, то есть внутреннее единство отдельных 50 областей математики более чем очевидно. Эти части имеют тенденцию к объединению в целостную конструкцию, которая отражается в их взаимопроникновении, в общих методах исследования, в единстве математического языка и других характеристиках.

**Гармония и школьная математика.** Как известно, школьная математика не представляет собой науку математику и, вообще говоря, не является ее частью, либо сегментом. Взаимосвязи между математикой и ее школьным курсом – тема отдельного рассмотрения. Здесь мы отметим лишь то, что школьный курс математики, ориентируясь на общеобразовательные цели, включает в себя отдельные темы математики, а также содержит самые разнообразные материалы из областей ее применения в науке, технике, экономике, спорте и другие областях человеческой деятельности. Основные математические достижения являются опорой курса математики общеобразовательной школы. Первым признаком гармонии курса позиционируется внутреннее единство математических тем, что в методике математики характеризуется как «внутрипредметные связи». Добавим, что такое единство, являя собой частичное выражение признака научной эстетики –

единства многообразий, также способствует повышению общей привлекательности эстетической архитектуры курса школьной математики. Такой принцип эстетики должен, прежде всего, использоваться в различных учебных математических дисциплинах.

Лучшим способом проявления гармонии в математике является идея Рене Декарта о системе координат. Она позволяет понятия алгебры и математического анализа связать с геометрическими фигурами, и наоборот. В результате точка ассоциируется с парой чисел, прямая – с уравнением первой степени с двумя неизвестными, окружность – с особым видом квадратного уравнения с 51 двумя неизвестными и т.д. В свою очередь, производная функции определяет направление движения точки по поверхности ее графика: если производная положительная, то точка будет двигаться вверх (по возрастающей) и т.д. Эта гармония, обнаруженная Декартом, позволяет использовать возможности разных областей математики при исследовании в каждой из них: алгебры, математического анализа, геометрии. Геометрия, например, дает возможности визуализации, алгебра и математический анализ – методы и приемы исследования и т.д.

Гармония должна присутствовать и в отдельных учебных математических дисциплинах. В геометрии это выражается в аксиоматической конструкции курса, требующей дедуктивного доказательства теорем, их взаимосвязи, постепенного усложнения понятий и последовательности изложения материала. Все это позволяет представлять курс геометрии как единство частей, «налагаемых» друг на друга, «переплетаемых» горизонтальными и вертикальными связями, главным свойством архитектурного устройства которых является гармония. Курс алгебры средней школы также обладает широкими возможностями выражения гармонии при аксиоматическом, дедуктивном построении. Эти возможности были реализованы, например, в учебниках [87–89], где основами алгебраической архитектуры выступали алгебраические операции, отношения равенства, неравенства и некоторые другие, связывающими элементами для которых являлись свойства и зависимости.

Еще одним источником гармонии в школьном курсе математики является прикладная направленность математики (или же прикладной фон). Такая ориентированность более характерна для школьной алгебры. Необходимо отметить, что дополнительную эстетическую привлекательность курсам математики придает единство на первый взгляд довольно далеких друг от друга теоретических (воображаемых) и прикладных (видимых) областей математики, а затем их практическое единение при изучении. Эстетическая привлекательность такого рода гармонии подчеркивается наличием признаков единства многообразий, всеобщности и применимости научной эстетики. Выше уже обращалось внимание на существующую гармонию между закономерностями природы и математики, между естественными науками, изучающими данные закономерности. Естественно, чтобы в школьных математических курсах предполагалось использование этой гармонии, ее выражение в каждом материале. Такой подход позволяет сделать более привлекательным изложение абстрактного математического материала, стимулировать мотивацию и интерес к его изучению.

Следует признать, что принцип гармонии не всегда сохраняется и часто нарушается в математических курсах и учебниках математики внутри системы образования одной и той же страны. В работе [86], к примеру, нами отмечены многочисленные нарушения такого рода в советских учебниках. Не менее отчетливо они выражены и в нынешних учебниках. Достаточно отметить, что учебники геометрии естественно-математических потоков средних и старших школ Республики Армения основываются на совершенно различных аксиоматических системах. Имеющие место многочисленные нарушения принципа гармонии между курсами алгебры и

геометрии, алгебры и математического анализа являются следствием непрофессиональной системы отбора учебников для общеобразовательных школ.

**Гармония урока математики.** Вопрос гармонии школьного урока математики заслуживает отдельного обсуждения. Здесь на первый план выдвигается целый ряд вопросов, не имеющих, к сожалению, однозначного решения. Несомненной истиной является тот факт, что урок, представляющий собой процесс изложения учителем учебного материала и его усвоением и восприятием учеником, должен быть единым, гармоничным целым. Но как достичь такой гармонии, когда класс состоит из десятков детей с различными способностями, предпочтениями и интересами? Причем в индивидуальные миры способностей, предпочтений и интересов большинства этих детей абстрактные идеи математики не укладываются, кажутся далекими от зарождающихся у них ценностных ориентиров, мыследеятельностных целей. Как создать столь важный для гармонии мир между двумя учениками с весьма различными способностями математического восприятия, когда оба они симпатизируют одной и той же девочке? Принимает ли учитель в этом случае во внимание возможные проявления зависти, чувства неполноценности и других негативных явлений, воздействующих на психику ребенка? Понимает ли учитель, что каждый раз, выставляя напоказ неспособность, беспомощность и негативное отношение ученика к математике, он отрицательно воздействует на психику ученика, снижая и придавая бледный оттенок его образу жизни? Нужен ли, в таком случае, этот урок ученику?

Возможно ли достичь гармонии посредством создания общей атмосферы доброжелательности? Терпимость, сострадание, взаимопомощь, благодарность – лучшие моральные качества для создания такой атмосферы, а ревность, злопамятность, мстительность, насилие, нетерпимость, враждебность, угнетение, месть, принуждение будут только препятствовать образованию этой атмосферы. Морально-этические качества должны быть присущи как учителю, так и ученику. Естественно, их влияние усиливается при их проявлении учителем. Учитель должен знать, что источником негативного отношения ученика к 54 учению могут быть упрямство, мрачность, неприветливость, суровость, высокомерие [90]. Для учителя важно обладать необходимыми профессиональными навыками и иметь большое сердце. Последнее ему необходимо для того, чтобы вмещать безжизненный математический материал в такие, казалось бы, «мелочи» жизни как солнечный день, новое платье девочки, направленные на нее взгляды, а также множество других мелочей, которые интересуют учеников, которыми полны их сердца и души. Приобщение к математике нескольких избранных в классе учеников (к чему сводятся уроки большинства наших учителей) не требует особого мастерства. Такие ученики могут изучать и успешно усваивать необходимую им математику без учителя.

### **Ритм**

Ритм (греч. *rhythmós*, от *rhéo* – теку) изначально трактовался как воспринимаемая форма протекания во времени каких-либо процессов, основной принцип формообразования временных искусств (поэзия, музыка, танец и др.). Как отмечается в (<http://vseslova.com.ua/word/Ритм-90798>), “к пространственным искусствам это понятие применимо постольку, поскольку они предполагают развертывающийся во времени процесс восприятия. Многообразие проявлений ритма в различных видах и стилях искусства, а также за пределами художественной сферы ... породило множество различных определений ритма, в связи с чем слово “ритм” не обладает терминологической чёткостью”..

В самом широком смысле ритм интерпретируется как «временная структура любых воспринимаемых процессов, образуемая акцентами, паузами, членением на отрезки, их группировкой, соотношениями по длительности и т.п.» [там же]. Часто ритм понимается как закономерное чередование или повторение и основанная на нём соразмерность; идеалом ритма считается точно повторяющиеся колебания маятника или удары метронома. «Эстетическое впечатление от таких ритмических движений объясняется «экономией внимания», облегчающей восприятие и способствующей автоматизации мускульной работы (например, при ходьбе) ...

В поэзии ... и музыке ... противопоставляют метру и связывают не с правильной повторяемостью, а с трудно объяснимым «чувством жизни», захватывающей силой устремления вперёд ...» [там же], основывающейся на сочетании соизмеримости (рациональности) и устойчивой повторяемости (статике), обеспечивающих эмоциональную и динамическую характеристики восприятия.

Ритм присутствует во многих явлениях действительности. Ритмичны движения космических тел: вращения спутников Солнца или вращения луны вокруг Земли, последовательность дней и ночей, цикличность времен года, рост растений и кристаллов. С ритмом может связываться не только движение предметов: ритмом может быть наделено также неподвижный объект: лес с расположением деревьев, растение с расположением веток и листьев, архитектурное строение с расположением окон, арок ... Ритм воздействует на наши органы чувств: мы можем воспринимать его зрением, слухом, прикосновением и даже воображением. Ритмичны журчанье ручья, стук колес поезда, звуки музыки. Во всех этих случаях ритм проявляется сохранением определенных интервалов между звуками.

Ритм может приносить радость или грусть, настроение торжественности, спокойствия или беспокойства. Небольшие колебания морских волн создают настроение покоя и умиротворения, а бушующее море ритмом своих грозных волн создает беспокойное настроение. Для получения желаемого впечатления от картины можно придать ей соответствующий ритм посредством расположения частей. Проявление ритма в горизонтальном направлении уменьшает ощущение высоты картины, а в вертикальном – ощущение меры проявления образующей закономерности и от частоты повторения. Чем большими будут соответствующие части картины и чем чаще они будут повторяться, тем сильнее будет проявляется ритм, и наоборот. Ритм – одно из важных средств выражения в искусстве, придающее произведениям композиционную завершенность и являющееся существенным компонентом в формировании образа. «С помощью того или иного ритмического строя художественные произведения ... различную эмоциональную окраску. Ритмические построения достигаются с помощью различных элементов симметрии, а также чередованием или сопоставлением любых элементов композиционного характера — контрастами или соответствиями масс, отдельных предметов, линий, зафиксированных движений, светотеневых и цветовых пятен, пространственных членений и пр. Ритмическая организация способствует достижению гармонической ясности или острой экспрессии художественного образа, чёткости восприятия произведения» (<http://vseslova.com.ua/word/Ритм-90798>),

Следует заметить, что в искусстве ритм не имеет математической точности. Он может быть пассивным или активным, разрывным или плавным и спокойным. Ритм может задаваться по следам линий, света, тени, цветов. Как закономерность, проявляющаяся в разнообразных явлениях действительности, ритм не может оставаться вне математики и ее школьного курса. Возможно, математические истоки возникновения и проявления ритма содержатся в транзитивности бинарного отношения: если первый объект находится в отношении  $\mu$  со вторым, а второй – в том

же отношении  $\mu$  с третьим, то между первым и третьим объектами имеет место то же отношение  $\mu$ . Наличие такого свойства у отношения, определенного на некоторой последовательности следующих друг за другом объектов (предметов), создает предпосылки к проявлению определенного ритма.

В математике и школьном курсе математики отношения эквивалентности (равенства, подобия, равносильности и др.) и порядка (больше, меньше и др.) наделены свойством транзитивности, что обуславливает существенное проявление ритма в соответствующих отраслях математики. Импликация и эквивалентность математических формул (утверждений) также наделены свойством транзитивности, в результате чего мы приходим к ритму суждений. Средства языка математики позволяют выражать многие явления, протекающие с ритмом, и в их исследовании использовать богатый арсенал области знаний. Ритм движения тел и других явлений в лучшем виде описывается периодичностью соответствующих функций. Если обратимся к графикам (периодичных) функций, изображающих подобные явления, то увидим, что их отдельные части с определенной частотой повторяются, что показывает также силу ритма. Она зависит от отношения высоты и длины периода: чем большим оказывается это отношение, тем сильнее ритм.

В школьном курсе математики рассматривается довольно широкий класс периодичных функций, в том числе тригонометрические функции. Но надо заметить, что обычно они не сопровождаются исследованиями, комментированием и объяснением ритмичности явлений действительности, лежащих в основе этих функций. Это снижает эффективность обучения и ослабляет эстетическую привлекательность изучаемого материала. Математические проявления ритма усматриваются также в арифметической и геометрической прогрессиях: в первой из них ритм характеризуется разницей, а во второй – частным. Существуют также другие характеристики, описывающие ритм конечных и бесконечных последовательностей.

### **Объединяющие признаки научного прекрасного в обучении математике**

Следующую группу объективных признаков научного прекрасного составляют объединяющие признаки. Объединение вещей, явлений, людей, обществ и т.д. организуется на основе общности определенных (некоторых) свойств и может иметь как положительное, так и отрицательное значение. Однако, в математике (как и в науке вообще) рассматривается только положительный эффект данного явления, а значит – все образуемые объединения считаются красивыми. Ниже мы рассмотрим такие объединяющие признаки научного прекрасного, как единство многообразий, всеобщность, применяемость и математические записи научных закономерностей.

#### **Единство многообразий и всеобщность**

Единство в многообразии – первый критерий, предложенный Френсисом Хатчесоном, как общий эстетический принцип для оценки прекрасного в природе и в науке (Д. А. Юм, 1973). Ярким проявлением единства многообразий и всеобщности оказывается понятие натурального числа: натуральное число  $n$  отражает количественную равносильность любых  $n$ -элементных множеств. При выявлении какого-нибудь свойства числа  $n$  мы можем распространять его на любое множество, содержащее  $n$  элементов. Число  $n$ , как и вообще любую переменную  $x$ , мы можем

рассматривать как объединение многообразий. В то же время переменная  $x$  может принимать любые числовые (и не только!) значения, что отражает ее всеобщность.

Любое математическое (и не только математическое) понятие можно рассматривать как объединение всех элементов, образующих объем этого понятия. Подобное объединение является прекрасным потому как сближает, позволяя в одном классе или в одном понятии объединить разнообразие определенных элементов/объектов. Соответственно, любое истинное утверждение, касающееся этого понятия, будет истинным и для любого элемента из объема этого понятия. Например, понятием «треугольник» мы объединяем все многоугольники с тремя сторонами и, доказывая, что сумма внутренних углов треугольника равна 180 градусов, применяем этот факт к любому многоугольнику с тремя сторонами.

Любая другая математическая теорема также имеет обобщенный характер: ее справедливость для некоторого широкого класса математических объектов является основанием для ее применимости как для подклассов этого класса, так и для его отдельных представителей. Применение теоремы для любого соответствующего случая или получение из нее какого-нибудь следствия Френсис Хатчесон связывает с прекрасным. Потому признак всеобщности принято считать вторым признаком прекрасного Хатчесона. К примеру, когда мы приходим к выводу, что площади треугольников с равными основаниями и высотами (или с одинаковыми произведениями основ и высот) равны, то используем теорему о площади треугольника, определяющей формулу  $S = ah/2$  для ее вычисления. Фактически таким образом мы виртуально объединяем в один класс все многообразие треугольников, что является выражением научного прекрасного.

Указанные признаки научного прекрасного, охарактеризованные Хатчесоном, широко проявляются в применениях математики в самых разнообразных отраслях науки и техники. Сами же эти применения математики выражают единство различных явлений, также утверждающие всеобщность математических теорем. Большие возможности для подобных проявлений научного прекрасного в самой математике дает метод координат, предложенный Рене Декартом и показывающий единство алгебры и геометрии. Первокурснику-математику университета, только-только знакомящемуся с элементами аналитической геометрии, знакомо чувство удовлетворения, появляющееся при применении простых алгебраических методов для решения некоторых геометрических задач, которые ранее (в средней школе) решались синтетическими, часто искусственными и сложными методами.

Удовлетворение, полученное от проявлений первого и второго признаков научного прекрасного Хатчесона, оказывает существенное мотивационное влияние на отношение к математической деятельности. Признаки научного прекрасного единства многообразий и всеобщности широко проявляются в аксиоматическом методе построения теорий. Системой аксиом векторного пространства, например, объединяется то, что является общим для прямой – одномерной структуры, плоскости – двумерной структуры, пространства – трехмерной структуры, как и вообще – любого примера векторного пространства (заданного над фиксированным полем). На основе этой системы развивается одна из важнейших теорий, лежащих в основе современной математики. Здесь проявляется признак научного прекрасного – единства многообразий, что является несомненным фактором эстетической привлекательности теории векторных пространств. Далее, результаты, полученные в этой общей теории, применяются для конкретных примеров векторных пространств. Это уже проявление всеобщности – второго признака научного прекрасного Хатчесона. Его эстетическая привлекательность очевидна, так как математический факт устанавливается не для каждого отдельного примера векторных пространств (что было бы

очень трудоемко и тоскливо), а проистекает из общих соображений о фактах векторного пространства. Подобные заключения можно сделать относительно любой алгебраической системы и не без оснований считать, что изящество современной математики, в частности – алгебры, во многом обусловлено именно первым и вторым признаками научного прекрасного Хатчесона.

Признаки единства многообразий и всеобщности широко проявляются и в школьном курсе математики. Рассмотрим ситуацию из опыта моего учителя математики. Мой школьный учитель, уважаемый Анушаван, обладал особенным преподавательским даром. Однажды, зайдя в класс, он провел на доске две параллельные линии, на нижней из них отметил отрезок, а на верхней взял две точки и соединил их с концами отрезка – получилось два треугольника. «Какой из них обладает большей площадью?» – спросил уважаемый Анушаван. Не получив нужного ответа от нас, уважаемый Анушаван вытер доску и объявил тему нового урока: «Формула площади треугольника». После объяснения урока он опять вытер доску, выделил формулу  $S = 0,5ah$  площади треугольника на ее крае, снова провел те же параллельные линии с отрезком, точками и треугольниками и повторил свой вопрос. Кажущееся невозможным сравнение становилось очевидным, благодаря простой математической формуле. Читая уже в наших глазах решение поставленной задачи, наш учитель вдохновенно сказал: «Вот сила математики». Потом он положил мел на край доски, вытер руки и вышел из класса, хотя звонка еще не было. А мы на этот раз не выбежали из класса, как обычно делали после ухода учителя. Конечно, проявление силы математики было очевидно, но нам показалось еще что-то – выше этой силы – что-то притягивающее, привлекательное, и это, видимо, было связано с двумя признаками научного прекрасного Хатчесона.

А вот и пример из моего опыта. Много лет назад в созданной мною частной школе я преподавал алгебру и параллельно с ознакомлением с языком алгебры проводил его сравнение с арифметическим языком, чтобы показать его возможности. Это позволило учащимся лучше понять возможности алгебры, вызвало интерес к ней. После введения понятия неизвестного в теме «Азбука алгебры», я обычно задавал такой вопрос: «Как вы думаете, сколько денег у меня?» Так как учащиеся уже были знакомы с понятием неизвестного, то нужный мне ответ вроде «У Вас  $x$  рублей» я получал. На вопрос же «Сколько денег у вас?» ответы были разными, но с конкретными числами. Здесь я проводил первую параллель между алгеброй и арифметикой: то, что мы знаем, сколько денег у нас, – это арифметика, а то, что мы знаем, сколько денег у других, – это уже алгебра. Преимущество алгебры здесь кажется очевидным, но оно имеет некоторый виртуальный характер, и приведенное сравнение не производит особенного впечатления на учеников. Следующее сравнение алгебры и арифметики продолжалось при изучении сложения (и других операций) в курсе алгебры. В его основу был положен тезис, что арифметика позволяет найти сумму известных величин, а алгебре дает возможность найти сумму неизвестных величин. Например, если у одного ученика  $x$  рублей, у другого –  $y$  рублей, то у них вместе будет  $x + y$  рублей. Интерес к этому новому сравнению как будто немного возрастает, тем не менее, скептицизм остается, так как в алгебраической операции сложения непосредственной пользы не усматривается. Тогда я попытался убедить учеников в том, что сложение, как и другие алгебраические операции с неизвестными, – не фокус и не магия, а действия, направленные на познание истины и решение повседневных задач, в чем мы неоднократно убедимся впоследствии. Для окончательного убеждения учащихся я приводил одну из развлекательных задач прекрасного армянского математика VII века Анания Ширакаци. Для этой цели хороши первые три его развлекательные задачи – храхчанакани (А. Ширакаци, 1979). Вот третий храхчанакан Ширакаци:

«Скажи другу твоему, что я могу узнать, сколько денег у него в кошельке. Если он скажет «попробуй», ты скажи ему: возьми количество своих денег, добавь столько же, удвой его, добавь еще раз заданное число и полученную сумму опять удвой. Когда он закончит свои вычисления и сообщит тебе результат, раздели его на десять. Полученное число и будет количеством денег в его кошельке». Если обозначим сумму в кошельке через  $x$ , то условие задачи приведет к вычислению выражения  $2(2(x + x) + x):10$ . Но очевидно, что это выражение равно  $x$ , т.е. Ширакаци в скрытой форме требовал другу сообщать именно число  $x$ . В этом случае учащиеся уже чувствуют силу и очарование алгебры, что опять связано с признаками научного прекрасного Хатчесона.

### **Математическая формулировка научной закономерности**

Согласно этому принципу эстетики математики, приведенной Владимиром Волькенштейном, любая четкая и гармоническая формулировка научной истины на языке математики приносит эстетическое впечатление (В. М. Волькенштейн, 1931).

Общеизвестна роль математики и математического языка в процессе формулировки закономерностей физики. Впечатления от математической формулировки законов механики, например, были настолько велики, что Ньютон рассматривал их как доказательство существования Бога. Есть много биологических закономерностей, которые описываются или представляются при помощи математических формул. Рассмотрение таких закономерностей на уроках математики имеет не только познавательное значение, но и придает эстетическую окраску изучаемому материалу. Привлечение же соответствующих материалов в учебниках делает их привлекательным для учащихся. Приведем примеры из учебника (Г.С. Микаелян, 1999, 2006)

1. В англоязычных странах температуру воздуха измеряют по фаренгейтам. Связь шкал Фаренгейта ( $F$ ) и Цельсия ( $C$ ) выражается формулой  $F = 1,8C + 32$ , и приводятся задачи, где неизвестными являются  $F$  или  $C$ .

2. Знаете ли Вы, что температуру воздуха можно определить, слушая крикет? Если обозначать через  $n$  число скрипов, выпущенных крикетом за одну минуту, то температуру воздуха по фаренгейтам можно определить по формуле  $F = 0,25n + 37$ . Далее приводятся задачи, где неизвестными являются  $F$ ,  $n$  или  $C$ .

3. Вес нормального мужчины в килограммах можно определить по формуле  $m = 0,9h - 90$ , где  $h$  – его рост в сантиметрах. Далее приводятся задачи, где неизвестными являются  $m$  или  $h$ .

Некоторые учителя исходят из значимости этого признака, когда важные формулы берут в рамки. В этот ряд нужно включить также моделирование текстовых задач. Однако здесь намечается некоторая переоценка значения математической записи: учащиеся (часто и учитель), создавая математическую модель текстовой задачи, записывают соответствующее уравнение или неравенство, решают его и на этом считают дело сделанным и не обращают внимания на анализ самой задачи. Не следует думать, что это делается из эстетических соображений (имея ввиду эстетику математической записи задачи). Просто в подобных случаях учащего интересует только ответ задачи и исполнение поручения учителя, что далеко от эстетических мотивов.

### **Применимость**

С древних времен люди понимали незаменимую роль вычислений и измерений при организации повседневной жизни. И параллельно с улучшением жизни, развитием цивилизаций возрастала роль математики, ее прикладное значение в самих различных сферах жизнедеятельности человека. Математика постепенно становилась одним из главных факторов

общественного развития, его ведущей силой. Но чем обусловлено подобное практическое значение отрасли науки, имеющей абстрактный характер по форме и виртуальной по содержанию?

Конечно, речь не о старинных методах подсчетов и измерений, хотя эти процедуры сохраняют свою актуальность и сегодня. Речь в первую очередь идет о взаимосвязях математики с природой. Как отмечает великий Галилей, «Книга природы написана на языке математики» и для чтения этой книги нужно знать язык математики. Без знания языка математики никакая наука, направленная на исследование природы, не может достичь существенных успехов. Поэтому и математика получила беспрецедентное применение в исследованиях природы и в некоторых отраслях науки. Благодаря математике возрастает надежность полученных результатов, вес истины в проведенных исследованиях, т.е. математика привносит в любую область науки познание и истину. Применение математики в физике, химии, экономике и других естественных и некоторых гуманитарных науках подтверждают сказанное. Более того, эти науки в своих современных формах обязаны математике. Но разве только природа является объектом исследования математики? А искусство? Разве оно не является формой познания природы и не требует обращения к математическому языку в этой области познания? И, действительно, математика имеет широкое применение в таких областях искусства, как архитектура, изобразительное искусство, музыка. В архитектуре применение математики становится возможным благодаря симметрии и пропорции. Важными элементами изобразительного искусства являются перспектива, параллельное проектирование, аксонометрия – чисто геометрические понятия, позволяющие применять математику при создании произведений. Применение математики в музыке обеспечивается использованием пропорций. Математика может находить применение в литературе, театре, кино, танцах и во многих других областях искусства, вводя там «порядок и закон».

Математика имеет широкое применение в технике. При помощи одной из «жемчужин» геометрии – теоремы Пифагора, например, можно получить ответ на один из важнейших вопросов, поставленных природой перед человеком. В организации жизнедеятельности человека важную роль играет построение прямого угла. В самом деле, без этого знания невозможно осуществлять постройку не только больших архитектурных сооружений, но и любых сооружений вообще. Можно смело считать, что прямой угол – основа строительства. Поэтому отвес – инструмент, позволяющий проверить перпендикулярность стены строительства, – является самым необходимым инструментом каменщика. Но та же задача решается и теоремой Пифагора (вернее – обратной ей): если квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то такой треугольник прямоугольный. Строители часто у себя держат треугольник с размерами сторон 3, 4, 5 и, используя обратную теорему Пифагора, проверяют с его помощью прямоту углов. Часто такие треугольники изготавливаются с помощью веревок, что делает более удобным их использование.

Следует отметить, что пифагоровы треугольники позволяют построить прямые углы на горизонтальной (и, вообще говоря, на любой) плоскости, чего нельзя сказать об отвесе. Ясно, что как признак Волькенштейна, так и признак применимости математики можно рассматривать как частные случаи принципов единства многообразий и всеобщности Хатчесона. В самом деле, любая запись законов природы или прикладной задачи на математическом языке является выражением единства в многообразии, а в разнообразиях применений такой математической записи проявляется всеобщность научной истины. Например, если сумма  $a$  депозита каждый год в банке увеличивается на  $p\%$ , то через  $n$  лет она станет равной  $a(1 + p/100)^n$  и эта закономерность

является выражением единства в многообразии, а ее применение для конкретных значений параметров  $a$ ,  $p$ ,  $n$  – проявлением всеобщности научной истины. В обоих случаях мы имеем дело с научной красотой.

Эстетический принцип применимости можно успешно использовать в процессе обучения математике. Выше я рассказывал об одном моем школьном учителе. Другой мой школьный учитель, уважаемый Ваграм, перед началом изучения теоремы Пифагора привел нас на прямоугольный школьный участок, предложил двум ученикам, начиная с угла участка, начать двигаться по его сторонам и измерять пройденный путь. Сам же, с загадочной улыбкой на лице, сообщал расстояние между учениками после каждого такого измерения и никогда не ошибался. Конечно, мы были удивлены, а уважаемый Ваграм затем проводил нас в класс и после объявления о том, что сейчас он раскроет секреты своего «волшебства», на доске писал тему нашего урока: «Теорема Пифагора» и раскрыл тайну самой прекрасной геометрической сокровищницы. Конечно, мои уважаемые учителя ничего не знали об Хатчесоне и, возможно, об эстетике математики вообще. Но они интуитивно чувствовали наличие эстетического в математике и умело использовали эти элементы в процесс преподавания.

### **Логические признаки научной эстетики в обучении математике**

Логические признаки научного прекрасного особенно ярко выражают свою эстетическую привлекательность в математике и логике. Здесь мы рассмотрим следующие логические признаки: логическую строгость, четкость, простоту, сведение сложного к простому.

#### **Логическая строгость**

Обычно математические рассуждения строятся по законам и правилам логики, что придает изложению этих рассуждений логическую строгость. Логическая строгость, в свою очередь, обеспечивает математическому знанию надежность, помогает избежать заблуждений, позволяет отыскивать пути, ведущие к истине. В то же время математика придает логическую строгость и исследованиям во всех тех науках, где она используется. В научном мире даже существует точка зрения, что научные результаты, полученные без использования математики, не могут считаться надежными. Указанные выше причины делают математическое знание желательным и полезным, придавая ему большую прикладную и эстетическую привлекательность. Логическая строгость свойственна математике и относится ко всем математическим объектам: понятиям, формулировкам теорем и задач, а также их доказательствам и решениям задач (Г. С. Микаелян, 2015. с. 366–404).

В отличие от собственно математики, в ее школьном обучении признак логической строгости должен соответствовать дидактическим принципам, которые требуют учитывать возрастные особенности учащихся, их способности в восприятии математического материала, имеющиеся знания и т.д. Признак логической строгости по вполне понятным причинам весьма слабо выражен в начальной школе, но усиливает свое влияние на следующих образовательных степенях.

Следует отметить, что логическая строгость по-разному реализуется при изучении материала отдельных тем. При изложении теоретического материала она выражается более полно,

однако там, где речь идет о практическом применении, логическая строгость выражается слабо. На начальном этапе обучения математике признак логической строгости формирует у учащегося осознание возможности ошибаться или не ошибаться при конструировании суждений, определяет основы безошибочных суждений. На этом этапе математика становится для учащегося мерой выражения истины. В средней школе учащийся знакомится с некоторыми способами дедуктивных умозаключений. Здесь главную роль играет доказательство – «искусство математики», которым обладает курс геометрии, где доказательство впервые выступает в качестве способа подтверждения истины, а процесс вывода из фактов, методы его реализации проявляются с большой интенсивностью. Следует отметить, что при соответствующем изложении учебного материала похожие возможности открываются также и в курсе алгебры, что повышает ее эстетическую привлекательность в обучении [87–89]. Эстетический признак логической строгости обретает широкие возможности в выражении в курсе алгебры средней школы при включении в него элементов логики. В этом случае четкие определения истинностных значений суждений, а также суждений, полученных посредством логических связей, наличие других элементов логики создают крепкую основу для обоснованных, аргументированных умозаключений (подробнее см. в цитируемых работах автора)/

Потенциал математики в формировании прекрасного посредством признака логической строгости получает особую силу, качество и эстетическую привлекательность в процессе построения умозаключений в старшей школе. Здесь, в доказательствах с помощью математической индукции, аналогии и других методов, логическая строгость обретает новые оттенки и сочетается с эстетическими признаками единства разнообразий и всеобщности. Действительно, если формулы общих членов, либо сумм арифметической и геометрической прогрессий в средней школе «доказываются» (выводятся) посредством индуктивных рассуждений, то в старшей школе эти и подобные формулы обосновываются уже с использованием метода математической индукции.

### **Четкость.**

Четкость мысли, ее вразумительное изложение являются необходимым условием как для ее восприятия, так и для эстетической привлекательности. Без четкости даже самая пленительная история теряет свою привлекательность. Нечеткое изложение материала может сделать его непонятным. Результаты научных исследований ученого обычно представляются и излагаются не таким образом и не в таком порядке, как они были получены. Здесь требуется мастерство изложения, что, в первую очередь, обусловлено четкостью. Великие мыслители, как правило, способны четко излагать не только полученные ими результаты, но и соответствующие области науки. Одним из главных условий успеха является четкость изложения.

Требуемая в математике четкость – это, в первую очередь, однозначные, ограждающие от неопределенности и порочных кругов определения понятий; это четкое представление их содержания, рассмотрение родовой и видовой принадлежности, их объема и примеров вне этого объема; четкое формулирование суждений и однозначность определения их истинностных значений; возможность однозначного восприятия умозаключений, теорем; аргументированность доказательств и т.д. Выполнение всех этих требований придает изложению математического материала эстетическую привлекательность. Эстетический признак четкости особенно важен в процессе обучения, где формируется и получает дальнейшее развитие человеческое мышление. Каким оно станет в будущем, обретет ли человек свое самое большое богатство – культуру четкой,

аргументированной речи – зависит от процесса обучения. И в процессе формирования этой культуры так же, как и одного из важных ее компонентов – четкости, первостепенное значение имеет процесс обучения математике.

Математическая деятельность формирует уникальную, идеальную меру четкости, соответствие которой если не обязательно, то желательно для успешной деятельности в научной, политической, правовой и других областях. Из-за несоответствия данному критерию часто бывает сложно понять, например, смысл различных суждений, продуцируемых в гуманитарных областях знаний либо на политической арене. Использование логического инструментария имеет большое значение для четкого изложения школьного курса математики. Без знания элементов логики сложно достичь четкого, аргументированного изложения математического материала так же, как без знания правил грамматики правильно строить предложения и суждения на родном языке. К примеру, попробуйте без знания этих элементов выяснить, истинна ли формула  $2 \leq 2$ , или формула  $1 = \pm 1$ . Опыт показывает, что большинство учителей, по сути, не понимает смысла (значения) знака  $\leq$ , хотя этот вопрос проясняется при обращении к понятию логической суммы. Действительно, формула  $2 \leq 2$  является логической суммой « $2 < 2$  или  $2 = 2$ » формул  $2 < 2$  и  $2 = 2$ , которая истинна лишь в том случае, когда истинна хотя бы одна из ее частей. В данном случае в утверждении « $2 < 2$  или  $2 = 2$ » истинным будет равенство  $2 = 2$ , из чего следует, что истинной будет также формула « $2 < 2$  или  $2 = 2$ » или же ее сокращенная запись  $2 \leq 2$ . Таким же образом формула  $1 = \pm 1$  представляется в виде логической суммы « $1 = 1$  или  $1 = -1$ » формул  $1 = 1$  и  $1 = -1$ , которая будет истинной, поскольку истинной является ее первая компонента – равенство  $1 = 1$ .

Приведем еще один пример. Для конструирования отрицания суждения «Айк является отличником» можно поставить логическую связку «не» перед глаголом «является». В результате мы получаем требуемое отрицание: «Айк не является отличником». Попробуем теперь сконструировать отрицание суждения «Все ученики класса являются отличниками». Куда можно поставить связку «не» в этом случае? Будет ли получено искомое отрицание, если подобно предыдущему случаю и здесь поставить связку «не» перед глаголом «являются», т.е. «Все ученики класса не являются отличниками»? Конечно нет! А решение вопроса вновь кроется в обучении элементам логики.

Таким же образом формула  $1 = \pm 1$  представляется в виде логической суммы “ $1 = 1$  или  $1 = -1$ ” формул  $1 = 1$  и  $1 = -1$ , которая будет истинной, поскольку истинной является ее первая компонента – равенство  $1 = 1$ . Приведем еще один пример. Для конструирования отрицания суждения “Айк является отличником” можно поставить логическую связку “не” перед глаголом «является». В результате мы получаем требуемое отрицание: «Айк не является отличником”. Попробуем теперь сконструировать отрицание суждения “Все ученики класса являются отличниками”. Куда можно поставить связку “не” в этом случае? Будет ли получено искомое отрицание, если подобно предыдущему случаю и здесь поставить связку “не” перед глаголом «являются», т.е. “Все ученики класса не являются отличниками”? Конечно нет! А решение вопроса вновь кроется в обучении элементам логики. Вопрос о взаимоотношениях естественного языка с математическим языком подробно рассмотрен в работе (Г.С. Микаелян, 2003). Здесь отметим, например, что представление математического отношения  $\leq$  в виде «не больше» вносит в процесс обучения четкость. Попытка замены этого отношения на «не дошел», «не длинный», «не дорогой» и другие подобные выражения, характерные для практической сферы, дополняет процесс усвоения данного понятия. При этом одновременно иллюстрируется разнообразие и богатство

языковых видов, а также необходимость обеспечения однозначности и четкости в математическом языке посредством единства многообразий.

Таким же образом знак «<», в зависимости от величины измерения измеряемого объекта, в природном языке интерпретируется с помощью терминов «короче», «уже», «мельче», «легче» и других, а сложение – «прибавить», «объединить», «углубить», «смешать», «удлинить» и другими понятиями, вычитание – «отнимать», «укорачивать», «замедлять» и другими понятиями – опять же, в зависимости от сущности «измеряемого объекта». И здесь процессу обучения придает дополнительную эстетическую привлекательность единство разнообразных языковых выражений, характеризующих отмеченные математические объекты. Наблюдаемые же отношения с естественным языком способствуют не только внесению четкости в математический язык, всестороннему охвату материала, но и процессу овладения родным языком.

Как в математике, так и в ее школьном курсе четкость в первую очередь требует однозначных определений исследуемых понятий. Это не только выражение эстетического признака четкости, но и основа эстетики математики, ее школьного курса и математического языка: без четкого и однозначного понимания сущности понятий математики не существует. Эстетическая привлекательность четкости ярко выражается также и в математических теоремах. Здесь четкость в первую очередь означает формулировку необходимых условий или же предпосылок, а также их доступное представление учащимся. Очень важно, чтобы учащийся понимал роль каждого условия теоремы в процессе ее доказательства и получении заключения. С технической точки зрения обычно понимание сущности (процесса) доказательства теоремы более сложно, что обуславливает использование логических инструментов, обеспечивающих четкость – доказательство должно производиться с помощью однозначно определенных, последовательных шагов, каждый из которых представляет собой истинное суждение или умозаключение, что в совокупности ведет к заключению теоремы.

«Для придания большей ясности признаку четкости в процессе математических рассуждений необходимо обеспечивать сопровождение обучения математического материала суждениями из повседневной жизни либо гуманитарной области, которые, в силу своей неопределенности, не воспринимаются однозначно и приводят к различным толкованиям. То же касается и задач: если их условия не являются достаточными для решения или же они нечеткие, то они не воспринимаются однозначно, а, следовательно, не может быть получено и решение.

Следует отметить, что эстетический признак четкости выражается параллельно с восприятием, пониманием. Без понимания излагаемого содержания не может быть четкости и эстетической привлекательности. Отсутствие понимания и механическое воспроизводство содержания, являющееся следствием отсутствия четкости, не только не способствует выражению его эстетической привлекательности, но и приводит к отрицательной эстетической реакции, отталкивает учащегося от учебного предмета и от математики в целом.

При воспроизведении каких-либо фактов учащимся либо при диагностировании усвоения им понятий и способов действий часто наблюдается отрицательный эффект: приученный к стандартным ответам учащийся не только легко забывает воспроизведенное, как и впоследствии (в жизни или же в профессиональной деятельности) привыкает к необдуманым, поверхностным действиям без проникновения в глубь явлений. Поэтому учитель обязан не выуживать из учащегося ответ, исправляя одно-два слова, а объяснять суть материала, исходя из эстетического признака четкости, исправлять ошибки, если они были допущены.

## Простота.

Еще древнеримский поэт Гораций считал простоту эстетическим признаком искусства. Что касается математики, то известна точка зрения, что математическая деятельность является сложной и, следовательно, далекой, от эстетического признака простоты. Но именно простота или же эстетический признак простоты являлись одной из главных движущих сил, которая наряду с эстетическим признаком четкости обеспечила беспрецедентное развитие математики. Действительно, для однозначного, избавленного от неопределенностей представления суждений в математике действует принцип четкости, который обычно реализуется посредством большого количества символов. И большое количество символов часто препятствует восприятию сути математического материала, однако посредством специальных приемов математика, приходит к определенным упрощениям. Рассмотрим, например, записи одного и того же выражения в виде  $2+3\cdot4-6:3$  и  $(2+(3\cdot4))-(6:3)$  и попробуем выяснить, который из них более эстетичен и какой смысл имеет его «эстетика». Первое из выражений не отличается каким-либо эстетическим признаком, в то время как во втором выражении есть три пары скобок, расположенных симметрично, что придает выражению определенную внешнюю привлекательность. Однако каждый, занимающийся математической деятельностью, предпочтет иметь дело не со вторым, а с первым выражением. Почему? Дело в том, что основная цель любой математической записи не обеспечивать внешний эффект, а реализовывать процедурную (или иную) сущность этой записи, в данном случае – выполнение действий. Потому запись будет восприниматься как хорошая, предпочтительная и эстетичная в том случае, если она упрощает процесс, «за ней стоящий». Первое из выражений является упрощенной записью второго, полученным освобождением выражения от скобок и применения правил, определяющих порядок выполнения действий. Если мы не будем применять такие правила, то обилие скобок в выражениях или формулах, диктуемое требованием признака четкости, будет препятствовать восприятию математической сущности выражения или формулы, усложнит совершаемые действия. Соответственно, упрощение ведет к облегчению восприятия и действий, а внешний вид «объекта» делает его эстетически привлекательным.

Вся история математики – это история поиска символов, записи, уточнения и упрощения с их помощью математических выражений и формул. Достаточно проследить за процессом развития математического языка, сравнить различные виды представления одних и тех же математических объектов на различных этапах их существования, чтобы стало видно их внешнее эстетическое развитие. Попробуйте прочесть работы математиков прошлого. В них изложение даже простых фактов замысловато и трудно понимается, иногда читателю требуется мастерство дешифратора. Причина – язык их представления. Математический язык достиг своего сегодняшнего совершенства в результате многовековой работы величайших математиков, а главная стимулирующая сила и эстетическая привлекательность полученных результатов обусловлены их четкостью и простотой. Смело можно утверждать, что без этого эстетического прогресса не был бы возможен и прогресс математики. Достаточно, например, сравнить числа и производящиеся с ними действия, когда они представлялись в римской и арабско-индийской или позиционной записи.

Действительно, попробуйте умножить друг на друга два числа, записанные в римской нумерации, или же, что еще сложнее, выполнить деление одного из них на другое. Последний процесс настолько сложен, что в средние века существовала отдельная математическая профессия для выполнения действия деления. Другой пример встречается в средневековой Армении, где одной из серьезных услуг величайшего математика Анания Ширакаци было составление таблицы

действий с натуральными числами. А сегодня, благодаря позиционной записи чисел и соответствующим процедурам, отмеченные действия не представляют сложности даже для учеников начальной школы.

### **Сведение сложного к простому**

Ясность, простота, ее наличие делает процесс эстетичным, а сложное часто становится непонятным, следовательно, неэстетичным. Поэтому сведение сложного к простому, упрощение следует считать процессом формирования эстетичности, ее признаком. Естественно, совершение открытия в какой-либо области математики требует от математика последовательности, выражения волевых качеств. Не менее сложным является и ознакомление со сделанными открытиями. Оно требует не только необходимого напряжения для понимания идей исследователя, но и огромного запаса знаний. И поэтому не удивительно, что работающие в различных областях математики уже давно с трудом или же совершенно не понимают друг друга. Для урегулирования этого процесса математики предпринимают последовательные шаги в сторону упрощения математического языка. В то же время сама математика, математическое открытие в большинстве случаев совершается посредством редукции сложного к простому, а суть математической деятельности сводится к упрощенному описанию свойств и отношений математических объектов. Великолепным примером выражения признака математической эстетики – сведения сложного к простому – является измерение площадей плоских фигур (а также длин частей кривых, объемов тел). Данный процесс мы начинаем с простейшей фигуры – квадрата, принимая один из них за единицу измерения. Далее, переходя к более сложной фигуре – прямоугольнику, показываем, что площадь прямоугольника равна произведению двух его сторон. Формулу вычисления площади прямоугольника в дальнейшем используем для вычисления площади треугольника и т.д.

Подобным образом организованный «вычислительный процесс» сведения сложного к простому, как и его результат, имеющий вполне определенную практическую значимость, был известен еще в Древнем Египте, Месопотамии, Античной Греции. Последовательность действий в нем довольно проста, легко воспринимается и, следовательно, эстетическая привлекательность процесса не велика. Однако площадь круга вычислить таким же способом оказывается невозможно. Для получения необходимого результата процесс вычислений требует некоего революционного шага, неожиданности, а также иных признаков «математической эстетики» и, естественно, гениальности в реализации этого процесса, которая была дана ученику Платона Евдоксу Книдскому. В предложенном методе исчерпывания Евдокс обосновывает не только способ вычисления площади круга, но и, по сути, закладывает первоосновы идеи предела. При этом правильная математическая формулировка полученных результатов стала возможной лишь через две тысячи лет после Евдокса, когда европейская математическая мысль силами Исаака Ньютона, Готфрида Лейбница и других математиков придала математическому языку современный вид. На этом языке площадь круга представляется как предел последовательности площадей вписанного в нее правильного  $n$ -угольника, где  $n$  стремится к бесконечности. Впоследствии, с появлением идеи интеграла, стало возможным вычисление площадей более сложных фигур.

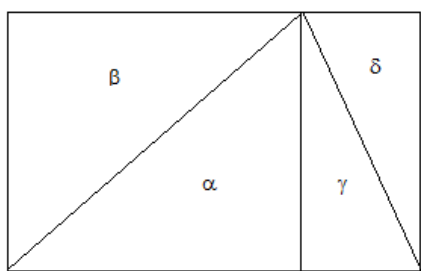
Подобный пример сведения сложного к простому является замечательным свидетельством стремления к выработке математического метода с очевидной эстетической привлекательностью. При обучении математике этот эстетический признак в первую очередь проявляется в процессе

усвоения понятий. Рассмотрение примера и контрпримера для любого понятия уже является сведением сложного к простому. Именно поэтому рекомендуется сопровождать введение каждого понятия рассмотрением примеров, относящихся к его объему, причем до введения самого понятия. В основном подобным образом определяются понятия через род и видовые отличия.

Эстетический признак сведения сложного к простому проявляется также и в применении определений. Например, обоснование необходимости введения и изучения основополагающего в математике понятия числа, его усвоение – чрезвычайно сложно реализуемые процессы, которые становятся более понятными и реализуемыми в первую очередь благодаря практическому использованию чисел. Сказанное относится не только к введению натуральных чисел как инструмента счета предметов и нумерации в начальной школе, но и к более сложным практическим применениям идеи числа в старших классах.

Сведение сложного к простому как эстетический признак широко используется в математических теоремах и их доказательствах. Применение любой математической теоремы уже само представляет собой сведение сложного к простому. Например, как найти объем такого тела, как конус? С первого взгляда соответствующий процесс является сложным, однако с помощью определенных математических приемов он сводится к простой формуле  $V = 1/3 \pi R^3$ . И эстетичность здесь проявляется не только в простом виде данной формулы, но и в возможностях ее использования.

Великолепным примером сведения сложного к простому является вычисление площади треугольника на уроке геометрии. Известно, что для получения площади прямоугольника выбирается единица измерения – квадрат. С помощью последовательных шагов (дробления квадрата на более мелкие квадраты и «замощения» ими прямоугольника), т.е. сведения сложного к простому, определяется площадь прямоугольника как произведение его двух сторон. А как поступить в случае с треугольником? На первый взгляд решения задачи кажется невозможным, так как треугольник никаким образом невозможно «замостить» квадратами, как бы мы их не уменьшали.



Однако мы можем сделать неожиданный шаг: не квадрат или прямоугольник вписываем в треугольник, а треугольник «вписываем» в прямоугольник, как показано на рисунке 3. Очевидно, этот неожиданный и непредсказуемый шаг (наличие соответствующих эстетических признаков) значительно повышает эстетическую привлекательность решения задачи. На чертеже видно, что треугольник  $\alpha$  равен треугольнику  $\beta$ , а  $\gamma = \delta$ .

Но данный треугольник равен объединению треугольников  $\alpha$  и  $\beta$ , а прямоугольник – объединению треугольников  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$ . Следовательно, площадь треугольника будет равна половине площади прямоугольника. С другой стороны площадь прямоугольника равна произведению его двух сторон. Одна из сторон является основанием треугольника, а вторая равна высоте треугольника. Откуда следует, что площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту. Таким образом, доказательство последнего суждения сведено к цепочке достаточно легких суждений, то есть от сложного к простому. Если же кому-то предложенные суждения покажутся сложными, можно прибегнуть к дальнейшим упрощениям.

Эстетический признак сведения сложного к простому в методике преподавания, учебниках, мастерстве учителя должен ориентироваться на поиск путей реализации важной педагогической и

социокультурной задачи повышения эстетической привлекательности изучаемого материала как и урока в целом.

### Упражнения на признаки математической красоты

Из учебника Г. С. Микаелян, Алгебра 8, «Эдит принт», 2024

101. (Обсуждение): И в жизни, и в математике мы узнаем о многих истинах. Знание истины — это хорошо или плохо? а. в жизни, б. в математике.

102. Выберите любое суждение, рассмотренное в теме, «Операции с действительными числами», которое является для вас неочевидной истиной. Каким прилагательным вы бы охарактеризовали знание этого суждения?

а) интересное, б) полезное, с) привлекательное, d) красивое.

103. Красивым принято считать знание неочевидной математической истины. Различайте неочевидные истины действительных чисел.

а. в законах сложения, б. в законах умножения, с. в свойствах сложения и умножения..

194. Приведите пример неочевидной истины в свойствах, рассматриваемых в параграфе «Рациональные выражения и рациональные дроби», знание которой вам понравилось.

346. Учитывая, что сведение сложного к простому является признаком красоты, можно ли считать красивыми:

а. приемы решения неравенств,

б. шаги, предпринимаемые при решении неравенств.

375. Укажите факты, представленные в теме «системы неравенств», которые вы можете считать привлекательными, поскольку они удовлетворяют следующему признаку математической красоты:

а. знание неочевидной истины,

б. сведение сложного к простому.

510. Расположите следующие свойства квадратного трехчлена в порядке их неочевидной истинности:

а. выделение полного квадрата, б. формулы для корней,

с. прямая теорема Виета, d. обратная теорема Виета

е. разложение на линейные множители, f. не имеет более двух корней

604. Как сложное сводится к простому в свойствах 1-3?

726. Покажите, что метод решения неравенств интервалами использует эстетический признак сведения сложного к простому.

727. Укажите в теме «Неравенства, содержащие модуль»:

а. очевидная истина, б. неочевидная истина

750. а. Какую часть равенства  $\sqrt{x^2} = |x|$  вы считаете простой, а какую - сложной?

б. Как в этом равенстве проявляется математическая красота сведения сложного к простому?

780. Как проявляется признак математической красоты сведения сложного к простому в следующей эквивалентности:

а. если  $c < 0$ , то  $\sqrt{ax + b} > c \Leftrightarrow ax + b \geq 0$ ,

б. если  $c > 0$ , то  $\sqrt{ax + b} > c \Leftrightarrow ax + b > c^2$ .

Из учебника Г. С. Микаелян, Алгебра 9, «Арег», 2025.

33. Математический объект - понятие, теорема, свойство, доказательство, задача, решение задачи считается красивым, если он наделен определенным признаком. Такие признаками красоты были впервые предложены шотландским философом Фрэнсисом Хатчесоном в 18 веке. Хатчесон предложил три таких признака, первым из которых является единство многообразий.

- а. Можете ли вы привести пример единства многообразий, которое доставило вам удовольствие?
- б. Является ли единство многообразий в математике прекрасным и доставляет удовольствие человеку?

34. Какое единство многообразий выражает следующее понятие?

- а. ученик, б. мальчик, с. мать, d. солдат, е. 1, f. 5, е.  $x$ , h.  $x - y$ :

35. Какой вид единства многообразий выражает свойство?

- а. армия состоит из полков,
- б. в школе двенадцать классов,
- с.  $x + 0 = 0$ ,
- d.  $x + (-x) = 0$ ,
- е.  $x - y = x + (-y)$ ,
- f.  $x : y = x \cdot 1/y$ :

36. Попробуйте понять, почему Хатчесон принял единство многообразий как характеристику эстетической привлекательности математических объектов. QR:

37. (Обсуждение). Единство многообразий хорошо или плохо?

- а. в жизни, б. в армянском языке, с. в математике.

82. Следующим эстетическим признаком математических объектов, предложенной Фрэнсисом Хатчесоном, является универсальность.

- а. Объясните универсальность математических объектов на примере.
- б. Вам нравится универсальность математических объектов,
- с. Универсальность математического объекта доставляет удовольствие?

83. Определите универсальность следующих утверждений:

- а. Ученик должен быть добросовестным,
- б. Старших нужно уважать,
- с. Родину нужно любить,
- d. Золотое правило нравственного поведения: поступай с другими так, как ты хотел бы, чтобы они поступали с тобой,
- е. Золотое правило нравственного поведения: не поступай с другими так, как ты не хотел бы, чтобы они поступали с тобой,
- f. Вы следуете золотому правилу нравственного поведения?

84. Определите универсальность следующих утверждений:

- а.  $1 < 2$ ,
- б.  $x + 0 = x$  для любого числа  $x$ ,
- с.  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ,
- d. Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину.

85. (Обсуждение). универсальность — это хорошо или плохо?

- а) в жизни, б) в армянском языке, в) в математике.

105. Что сложное, а что простое, когда мы определяем:

- a.  $y = f(x + a)$  через  $y = f(x)$ ,      b.  $y = f(x) + a$  через  $y = f(x)$ ,  
c.  $y = f(-x)$  через  $y = f(x)$ ,      d.  $y = -f(x)$  через  $y = f(x)$ ,  
e.  $y = -f(-x)$  через  $y = f(x)$ ,      f.  $y = af(x)$  через  $y = f(x)$ .

106. Последний признак красоты математических объектов, предложенное Хатчесоном, — это знание неочевидной истины: знание неочевидной истины о математических объектах прекрасно и доставляет человеку удовольствие и радость.

a. На каждом уроке алгебры вы сталкиваетесь со многими неочевидными истинами. Вам это нравится? Можете ли вы привести соответствующие примеры?

107. (Обсуждение). Хорошо или плохо знать неочевидную истину?

a. в жизни,    b. в армянском языке,    c. в математике,    d. в спорте.

108. 1). Назовите утверждение, рассмотренное в параграфе “Преобразования графика числовой функции”, которое является для вас неочевидной истиной.

2). Каким прилагательным вы бы описали знание этого утверждения?

a. интересное, b. полезное, c. привлекательное, d. Красивое.

109. Является ли утверждение неочевидной истиной?

a.  $1 = 1$ ,

b. если  $a = b$ ,  $b = c$ , то  $a = c$  для произвольных чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,

c. наибольшая сторона треугольника лежит напротив наибольшего угла,

d. равные алгебраические выражения также тождественно равно равны,

e. тождественно равные алгебраические выражения также равны.

f. количество простых чисел бесконечно,

e. количество простых однозначных чисел равно 4,

h. уравнение  $x^2 + y^2 = z^2$  имеет решение,

t. Великая теорема Ферма: уравнение  $x^n + y^n = z^n$  не имеет решения при натуральном  $n > 2$ .

133. Как бы вы интерпретировали единство многообразий в пунктах а – е Свойство 2?

167. Являются ли формулы для сложных процентов неочевидными истинами?

203. Является ли теорема Безу неочевидной истиной?

204. Как вы понимаете универсальность теоремы Безуи?

238. Очевидная это или не очевидная истина?

a. Эквивалентность утверждений о том, что многочлен  $f(x)$  имеет корень  $a$ , и он делится на двучлен  $x - a$  без остатка.

б. Если многочлен  $f(x)$  имеет различные корни  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , то он будет делиться на произведение  $(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$ .

в. Количество корней ненулевого многочлена не может превышать его степени.

г. Равенство многочленов от одной переменной является тождеством,

д. Тождество многочленов от одной переменной является равенством.

274. Покажите, что эстетический признак сведения сложного к простому используется при решении рациональных уравнений.

275. Укажите очевидные и неочевидные истины, с которыми вы столкнулись в параграфе «Рациональные уравнения». С какой из них было приятнее всего познакомиться или узнать?

304. (Задача Софи Жермен). Докажите, что если  $a$  - натуральное число, большее единицы, то число  $a^4 + 4$  является составным.

Решение:  $a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 = (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a)$ .

И если  $a$  больше 1, то множители полученного произведения отличны от 1.

а. Является ли эта задача Софи Жермен неочевидной?

б. Является ли решение этой задачи Софи Жермен неочевидным?

с. Вам нравится или кажется ли вам эта задача или ее решение красивыми?

305. В чем универсальность приема подстановки переменных?

306. Объясните признак единства многообразий на примере решения квадратных уравнений.

384. Как бы вы интерпретировали признаки единства и универсальности многообразий на примере любого из материалов параграфа

385. Интерпретируйте признак сведения сложного к простому на любом из примеров, рассмотренных в параграфе «квадратные неравенства».

425. Интерпретируйте проявления признака математической красоты единства многообразий, универсальности, неочевидности и сведения сложного к простому в:

а. свойстве 1, б. свойстве 2, с. свойстве 3.

параграфа «зависимость решения квадратного неравенства, от дискриминанта».

556. Не означает ли единством многообразий?

а. система, б. совокупность.

## Литература

1. *Аврелий А. (2017)*. Музыке, VI, XIX, 24 М. 2017.
2. *Большой энциклопедический словарь (2002)*. А–Я. 2-е изд./ Гл. ред. Прохоров А.М. М.: Большая российская энциклопедия, 2002.
3. *Борев, Ю.Б. (1960)*. Основные эстетические категории. М.: Высшая школа, 1960..
4. *Birkhoff, G. D. (1956)*. Mathematics of Aesthetics. In: Newman, J.R. (ed.): The World of
5. *Болтянский В. Г. (1982)*, Математическая культура и эстетика, Математика в школе. 1982, No2.
6. *Винкельман И. И. (1890)*, История искусства древности, Равель, 1890.
7. Волькенштейн В. М. (1931). Опыт современной эстетики, М., 1931
8. *Волошинов А. В. (2000)*, Математика и искусство, М., 2000
9. *Кобалия О. А., (1985)*. Эстетическое воспитание при обучении геометрии в средней школе, Дисс. ... канд. пед. наук, М., 1985.
10. *Котина С. В. (1989)*, Принцип красоты в системе методологических регулятивов естественно - научного познания, Философские науки. 1989. No11. С. 110-117
11. *Лосев, А.Ф. (1965)*, Шестаков, В.П. История эстетических категорий. М.: Искусство, 1965.
12. *Мендельсон, Э. (2013)*. Введение в математическую логику. М.: Книга по Требованию, 2013.
13. *Микаелян, Г.С. (1999, 2006)* Алгебра–7. Учебник для общеобразовательной школы. Ереван: Эдит Принт, 1999; 2006). (на армянском языке).
14. *Микаелян, Г.С.(2003)*. Проблемы обучения алгебре. Ереван: Эдит Принт, 2003. 186 с. (на армянском языке).
15. *Микаелян, Г.С. (2007)* Алгебра–8. Учебник для общеобразовательной школы. Ереван: Эдит Принт, 2007). (на армянском языке).

16. **Микаелян, Г.С. (2008)** Алгебра–9. Учебник для общеобразовательной школы. Ереван: Эдит Принт, 2008). (на армянском языке).
17. **Микаелян Г. С., (2014).** Beauty and educational potential of mathematics. Yerevan. 2014. (in Armenian).
18. **Микаелян Г. С., (2015).** Beauty and educational potential of mathematics. Yerevan. 2015. (in Armenian).
19. **Микаелян Г. С., (2019).** Эстетические основы математического образования. Ереван-Черкассы, 2019. 2019.
20. **Мороз, О.П. (1989)** Прекрасна ли истина? М.: Знание, 1989.
21. **Ритм. Vseslov A. URL:** <http://vseslova.com.ua/word/Ритм-90798>
22. **Саранцев Г. И., (2003)** Эстетическая мотивация и обучение математике. Саранск, 2003.
23. Словарь иностранных слов (2014) современного русского языка / Сост. Т.В. Егорова. М.: Аделант, 2014.
24. **Якир М. С (1989).** Что такое красивая задача?, Математика в школе.- 1989. -№6.
25. **Цатурян, А.М. (1991).** Методологический принцип симметрии в курсе физики средней школы. дис. ... канд. пед. наук. Санкт-Петербург, 1991
26. Ширакаци, А. (1979). Библиография. Ереван: Советакан грох, 1979. 400 с. (на армянском языке).
27. **Философская энциклопедия (1960).** в 5 т. / Глав. ред. Ф.В. Константинов. М.: Советская энциклопедия, 1960. Т. 1. 504 с.; 1962. Т. 2. 575 с.; 1964. Т. 3. 584 с.; 1967. Т. 4. 591 с.; 1970. Т.5. 740 с
28. **Философский энциклопедический словарь (2010).** М.: Мысль, 2010. Т. 1.
29. **Юм, Д. А. (1973).** *Хатчесон Фрэнсис, Юм Дэвид, Смит Адам. Эстетика.* М.: Искусство, 1973.
30. **Boethius (1995).** De institutione arithmetica. In J.Y. Guillaumin (Ed.). With French translation. Paris; Belles Lettres, 1995.
31. **Davis, P. J.; Hersh, R. (1981).** The Mathematical Experience. Boston: Birkhäuser.
32. **Dreyfus, T.; Eisenberg, T. (1986):** On the Aesthetics of Mathematical Thought. For the Learning
33. of Mathematics - An International Journal of Mathematics Education, v6, n1, pp. 2–10.
34. **Dirac, P. (1977).** In: History of Twentieth Century Physics. Proceedings of the international School of Physics "Enrico Fermi", Course 57, New York: Academic Press, p. 136.
35. **Ebeling, W.; Freund, J.; Schweitzer, F. (1998):** Komplexe Strukturen: Entropie und Information.
36. Stuttgart und Leipzig: Teubner.
37. **Eysenck, H. (1972).** Test your abilities. М., 1972.
38. **Hutcheson, Francis (2004).** An Inquiry into the Original of Our Ideas of Beauty and Virtue in Two Treatises. Indianapolis, 2004.
39. **Le Corbusier (1923).** Vers une architecture. Paris: G. Crès et Cie, 1923. 230 pp. URL: <https://archidea.com.ua/rarity/digest/359032-lekorbyuze-k-arhitekture>.
40. **Poincaré, H. (1956).** Mathematical Creation. In: J. R. Newman (ed.): The world of mathematics, v4, 7th edition. New York, NY: Simon and Schuster, pp. 2041–2050.

41. Weyl, H. (1952). *Symmetrie. Basel und Stuttgart: Birkhäuser. Whitcombe, A. (1988):* Creativity, Imagination, Beauty. Mathematics in School, v17, n2, pp. 13. Whitehead, A. N. (2009). The Adventure of Ideas, Moscow. 2009.

## **ԳԻՏԱԿԱՆ ԳԵՂԵՑԻԿԻ ՕԲՅԵԿՏԻՎ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻՆ**

### **ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ՄԵՉ**

**Համլետ Սուրենի Միքայելյան**

**Ամփոփում:** Աշխատանքում դիտարկվում է մաթեմատիկայի և գեղեցիկի փոխհարաբերության հիմնահարցը՝ գեղեցիկի կազմավորման մաթեմատիկայի ունեցած դերի և մաթեմատիկայի ու նրա ուսուցման գործընթացի գեղեցիկ լինելու տեսանկյունից: Աշխատանքում խնդիրը պարզաբանվում է գեղեցիկի գիտական կամ մաթեմատիկական հայտանիշներին բավարարելու տեսանկյունից: Գիտական գեղեցիկի հայտանիշներն առաջին անգամ շրջանառության մեջ է դրել տասնութերորդ դարի շոտլանդացի արվեստագետ Ֆրեյսիս Հատրեսոնը: Ինչպես Հատչեսոնը, այնպես էլ նրա բազմաթիվ հետևորդները առաջադրելով որոշ բնութագրիչներ, գիտական կամ մաթեմատիկական օբյեկտների գեղեցկությունը գնահատում են այդ բնութագրիչներին բավարարելու տեսանկյունից: Ժամանակի ընթացքում գոյացել է նման բնութագրիչների կամ հայտանիշների բավականին մեծ քանակություն և դրանց դասակարգման խնդիրը դարձել է արդիական: Հեղինակը կատարելով նմանատիպ դասակարգում, հիմքում դնելով գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ տեսանկյունները: Աշխատանքում դիտարկվում են մայն օբյեկտիվ տեսանկյունը, և առկա հայտանիշները տրահվում են երեք խմբի՝ կազմավորող, միավորող և տրամաբանական հայտանիշների խմբեր: Աշխատանքում հիմնականում համակարգված ձևով շարադրարում են այդ ուղղությամբ հեղինակի նախկինում ստացված արդյունքները, արվում են որոշ նոր շեշտադրումներ:

**Բանալի բառեր:** Գեղեցիկը, մաթեմատիկա, մաթեմատիկական կրթություն, գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հայտանիշներ, կազմավորող հայտանիշներ, միավորող հայտանիշներ, տրամաբանական հայտանիշներ:

## **ОБЪЕКТИВНЫЕ ПРИЗНАКИ НАУЧНОГО ПРЕКРАСНОГО В МАТЕМАТИКЕ И В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ**

**Гамлет Сурени Микаелян**

**Резюме.** В работе рассматривается вопрос о соотношении математики и красоты с точки зрения роли математики в формировании красоты и экзистенциальной природы математики и процесса ее преподавания. В работе проблема проясняется с точки зрения удовлетворения научных или математических характеристик красоты. Характеристики научной красоты впервые были введены в оборот шотландским художником XVIII века Фрейсисом Хэтчесоном. И Хатчесон, и его многочисленные последователи, предлагая определенные характеристики, оценивают красоту научных или математических объектов с точки зрения удовлетворения этим характеристикам. Со временем таких характеристик или признаков появилось довольно большое

количество, и проблема их классификации стала актуальной. Автор, составив подобную классификацию, основываясь на объективных и субъективных аспектах красоты. В работе рассматривается только объективный аспект, а имеющиеся признаки разделены на три группы: формообразующие, объединяющие и группы логических антонимов. В работе в основном систематически излагаются полученные ранее автором результаты в этом направлении, а также делаются некоторые новые акценты.

**Ключевые слова:** прекрасное, математика, математическое образование, объективные признаки научного прекрасного, формирующие признаки, объединяющие признаки, логические признаки.

## **OBJECTIVE FEATURES OF SCIENTIFIC BEAUTY IN MATHEMATICS AND IN MATHEMATICAL EDUCATION**

**Hamlet Sureni Mikayelyan**

**Summary.** The work considers the issue of the relationship between mathematics and beauty from the perspective of the role of mathematics in the formation of beauty and the existential nature of mathematics and its teaching process. The work clarifies the problem from the perspective of satisfying the scientific or mathematical characteristics of beauty. The characteristics of scientific beauty were first put into circulation by the eighteenth-century Scottish artist Frebbsis Hatcheson. Both Hutcheson and his numerous followers, proposing certain characteristics, evaluate the beauty of scientific or mathematical objects from the perspective of satisfying these characteristics. Over time, a fairly large number of such characteristics or signs have emerged, and the problem of their classification has become relevant. The author, having made a similar classification, based on the objective and subjective aspects of beauty. The work considers only the objective aspect, and the existing signs are divided into three groups: forming, unifying, and groups of logical antonyms. The work mainly systematically presents the author's previously obtained results in this direction, and some new emphases are made.

**Keywords:** beauty, mathematics, mathematical education, objective features of scientific beauty, formative features, unifying features, logical features.

**Получено в редакцию - 11.06.2024**

**Рецензирована – 13.02.2025**

**Отправлен на сайт – 17.05.2025**

# Mathematics in school

# Математика в школе

## Մաթեմատիկան ԴՊՐՈՑՈՒՄ

Գիտամեթոդական ամսագիր  
Scientific methodical journal  
Научно-методический журнал  
ISSN 1829-4111  
№ 5 (118) 2025



ՀԱՍՏ Երևան, Խանջյան 5, 314 սենյակ  
ASPU Yerevan, Khanjyan 5, room 314  
АГПУ Ереван, Ханджяна 5, комната 314  
<https://mathinschool.aspu.am/>  
e-mail: [h.s.mikaelian@gmail.com](mailto:h.s.mikaelian@gmail.com)

