**ОБЪЕКТИВНЫЕ ПРИЗНАКИ НАУЧНОГО ПРЕКРАСНОГО В МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ**

ORCID 0000-0001-5387-1115

Гамлет Суренович Микаелян

АГПУ им. Х. Абоаяна



 ***Միքայելյան Հ․Ս․ ․*** *մանկ․ գիտ․ դոկտոր,*

*Ֆ․մ․գ․թ․, պրոֆեսոր*

**ВВЕДЕНИЕ**

 С момента первых шагов и до конца свох дней человека привлекает одна важная особенность вещей и явлений, которая, по словам французской энциклопедии «Лариус», «радует глаз и ум». Эта исключительная особенность на протяжении веков характеризовалась прилагательным «прекрасное». Не менее значимым в жизни человека имеет знание количественных соотношений, размеров, форм и порядков предметов и явлений окружающего мира, что и составляет содержание математики. Хорошо известно роль математики в научно-техническим развитием, в прогрессе человечества в целом. И вполне естественно выяснение вопроса о красоте математики։ прекрасна ли математика, могут быть красивыми ее объекты, “радовать глаз и ум” и участвует ли математика в формировании красоты?

 Ответ на вопрос о красоте математики, кажется, дается в эстетических характеристиках математических объектов, таких как «красивая теорема», «красивое доказательство», «красивая задача» и т. д. Примеры участия математики в формировании прекрасного можгут дать нам расположение картины, висящей на стене и расположение ученических парт в школьном классе. Наклоните картину или нарушите параллельность парт в классе и ваш глаз не будет радоваться. Другими словами, математическое понятие параллелиости участвует в формировании красоты. Однако помимо предложенных простых примеров есть и более глубокие и более надежные пути для нахождения ответов на поставленные вопросы.

 Хотя вопрос прекрасного в науке рассматривался еще в древности - Платон уже говорил об учениях о прекрасном, но конкретные исследования о научном прекрасном впервые встречаются в 18-ом веке у шотландского философа Френсиса Хатчесона (Francis Hutcheson, 2004). Как Хатчесон, так и последующие исследователи предлагают некие признаки научного прекрасного и пытаются оценить эстетическую привлекательность научных объектов, исходя из их соответствия признакам, отмеченными ими. Cам Хатчесон предложил три признака прекрасного в науке - единство разнообразий, общность научной истины и познание неочевидной истины (Francis Hutcheson, 2004). Его идеи произвела большое влияние на дальнейшее развитие эстетической мысли. В этом направлении своими работами выделились Девид Хьюм, Адам Смит, Иммануел Кант и другие. Анри Пуанкаре, в качестве эстетического признака, выделяет гармоничность и неожиданность выявления математических объектов (H. Poincaré, 1956). Георг Биркгоф предлагает определенную формулу для мер оценки математического прекрасного: M = O/C, где M - мера красоты предмета, O - мера его порядка, а С – мера тех усилий, которые применяются для понимания сущности этого предмета (G. D. Birkhoff, 1956). Некоторые авторы оспаривают присутствие деления в этой формуле. А психолог Ганс Айзенк предлагает заменить формулу Биркгофа следующей формулой: M = O$∙$C, так как он считает, что чем больше усилий затрачивается на понимание математических закономерностей, тем больше полученное от этого удовольствие (H. Eysenck, 1972). Искусствовед В. М. Волькенштайн предлагает друге признаки прекрасного в науке: сведение сложного к простому, эстетическое впечатление появляется только преодолением целенаправленного, трудного и сложного препятствия, четкая и гармоничная математическая формулировка научного достижения (В. М. Волькенштейн, 1931). (Вейль А. 1952) утверждает, что красота тесно связана с симметрией. П. Дирак таким признаком считает математическая запись фундаментальных законов природы (P. Dirac ,1977). (Г. И., Саранцев, 2003) в качестве признаков появления прекрасного в содержании математики, принимает порядок, логическую строгость, ясность, общность ее применения в разных разделах математики, своеобразие, неожиданность. Порядок считают эстетическим признаком также (P. Davis, R. Hersh, 1981). (М. С Якир ,1989) ссылается на красоту математической задачи и в качестве признаков, характеризующих красивую задачу, предлагает непредсказуемость, неожиданность, ясность, присутствие революционного шага, оптимистичность, работу. (О. А. Кобелия, 1985) обуславливает эстетическую привлекательность математической идеи ее общностью и применяемостью. (В. Г. Болтянский, 1982) предлагает характеризовать красоту математического объекта /формулы, задачи, теоремы и т.д./ изоморфизмом этого объекта или его наблюдательными моделями и неожиданностью ее появления. Согласно Болтянскому:

Красота = изоморфизм + ясность + неожиданность.

(T. Dreyfus,; T. Eisenberg, ,1986) обуславливает эстетическую привлекательность простотой, лаконичностью и ясностью, а (W. Ebeling, J.Freund, F. Schweitzer,1998) прекрасное связывают со сложностью; сложность необходима, хотя и недостаточна, для эстетики.

 В работах, посвященным научному прекрасному, не проводится классификация признаков научного или математического прекрасного. В работах (Г.С. Mикаелян, 2014, 2016, 2019). мы подразделяем признаки научного прекрасного по их объективным и субъективным характерам, что расширяет возможности восприятия прекрасного. Мы подразделяем их по объективному и субъективному характеру, что расширяет возможности восприятия прекрасного.

 Часть признаков научного прекрасного относится к объектам той или иной научной области: они являются признаками объекта. Таковыми являются симметрия, гармония, оптимальность, логическая строгость, четкость и т.д. Например, симметрия – признак разнообразных объектов математики, физики, химии и других естественных наук, логическая строгость – признак научной мысли и т.д. Подобные признаки мы называем объективными признаками научного прекрасного. Другая часть признаков научного прекрасного соотносится с субъектом и мы их здесь не рассиатрываем.

 Объективные признаки научного прекрасного, в свою очередь можно разделить на части. Первую группу объективных признаков научного прекрасного составляют образующые элементы природы: порядок, симметрия, сравнение, гармония, ритм, оптимальность, стабильность, применяемость. Назовем эти признаки образующими признаками научного прекрасного. В случае с математикой эти признаки выражают свойства прикладных объектов математики, применяемые как в математике, так и разных областях науки и образования.

 Вторая группа признаков, которую составляют четкость, ясность, приведение сложного к простому, логическая строгость, относится к научному языку. Эти признаки свою эстетическую привлекательность особенно ярко выражают в математике и логике. Назовем их логическими признаками научного прекрасного.

 Третью группу признаков составляют общность, единство разнообразий, математическая запись научной закономерности, оригинальность, революционный шаг. Это те признаки, которые объединяют научные объекты, по этой причине назовем их признаками объединения научного прекрасного.

 Настоящая работа посвящена объективным признакам научного прекрасного, их роли в решении вопросов, поставленный выше.

**Прекрасное**

 На протяжении веков человечество волновало прекрасное, человеку не давало покоя желание познать тайны прекрасного. Еще в XXV в до н.э. в шумерских летописях рассматривается вопрос взаимоотношения прекрасного и полезного: сократовский подход – «прекрасное – это наиболее полезное», за несколько тысяч лет до него принимали шумеры. Руководствуясь этим же подходом, древние египтяне приписывали красоту Нилу потому, что он «несет хлеб и еду»․

 Прекрасное – один из основных предметов античной греческой мысли. Пифагор и пифагорейцы считали, что небо, вся Вселенная – это гармония и число, а прекрасное – мера гармонии и оно выражается некими отношениями чисел. Гераклит считал, что прекрасное относительно, так как «самая прекрасная обезьяна безобразна в сравнении с человеком». Сократ обусловливал прекрасное полезным: «корзина с навозом прекрасна, если она полезна»․ Прекрасное – один из высших идеалов Платона. Это следует не из историко-общественного опыта, а имеет идейное, духовное начало. Прекрасное материального преходяще и относительно, в то время как, настоящая красота вечна, постоянна, не относительна. «Она не рождается, не уничтожается, не уменьшается, не может быть то красиво, то безобразно, здесь быть прекрасно, там – безобразно, чем-то быть прекрасным, а чем-то безобразным, для кого-то быть прекрасным, для кого-то безобразным» (C. B. Котина, 1989). Для Платона это вечная идея, чему чужд переменчивый мир вещей. Аристотель считал, что прекрасное – это качество, объективное свойство предметов, явлений. Среди этих свойств он выделяет величину, сравнение и порядок, для изучения которых необходимо обратиться к математике. Прекрасное – не великое, и не малое, оно выступает в качестве меры, а мера всего – человек, с которым и должны сравниваться все предметы.

 Средневековые мыслители Аврелий Августин и Фома Аквинский источник прекрасного видели в Боге. Чувственное прекрасное и получение от него удовольствия отцы церкви считали грехом.

В эпоху Возрождения восстановились и продолжились обычаи античной эпохи о представлениях прекрасного. Прекрасным считались природа, натуральное, радость ее восприятия, а идеалом прекрасного был человек и, в первую очередь, тело человека. Одновременно принималась также относительность прекрасного, в его определении важным считалась роль сравнения. Лука Пачоли, в качестве нормы прекрасного представил золотое сечение. В эту эпоху прекрасное связывалось с нравственным, справедливым и истиной: «прекрасное прекрасно в сто раз больше, если оно короновано драгоценной истиной»,- говорит Уильям Шекспир.

В эпоху классицизма прекрасное сводится к элегантности. Прекрасным считается не вся природа, а цель искусства - отражение этого прекрасного, хотя с помощью искусства можно красиво изобразить даже безобразное.

В эпоху просвещения прекрасное рассматривается как звено, связывающее разум с чувствами. Франсуа Вольтер считал прекрасное свойством объектов природы, таких как вес, цвет, объем. Дени Дидро различает два вида прекрасного: действительное, объективное прекрасное, которое существовало также до человека, и относительное прекрасное, которое существует только для человека. Он считает, что прекрасное принимают не разумом, а чувством. Йоган Винкельман сущность прекрасного объясняет свойствами предметов, их цветом, симметрией и ритмом. Он считает, что прекрасное – это цель искусства и его центр, оно формируется и развивается с помощью воспитания и образования (И. И. Винкельман, 1890).

Немецкая классическая философия внесла новые идеи восприятия прекрасного. Иммануил Кант считает, что прекрасное появляется только тогда, когда очищается от материального содержания. Согласно Фридриху Шиллеру прекрасное – это свобода, а его основа – ясность. Он разделяет изображение прекрасного и прекрасное изображение. Георг Гегель считает, что прекрасное – чувственное явление и второстепенно в сравнении с истиной: насколько глубоко думает человек, настолько меньше ему необходимо прекрасное. Прекрасное, в первую очередь, относится к области искусства, а прекрасное природы предшествует ему.

Как видим, у мыслителей прошлого нет единого подхода к вопросу прекрасного. Платон говорит: «Очень легко найти пример прекрасного, но очень трудно объяснить, почему они прекрасны». А Альбрехт Дюрер признается: «Я не знаю, что такое прекрасное». Один из величайших эстетов классицизма Йоган Винкельман считает: «Красота - одна из больших тайн природы. Ее все видят и чувствуют, многие пытались дать представление о ее сущности, но всегда безрезультатно» (И. И. Винкельман, 1890).

На самом деле трудно выявить сущность прекрасного. Например, какое сходство есть между прекрасным видом природы, щебетаньем птицы и поведением юноши, помогающему старику, если все это характеризуются прекрасным?

Естествоиспытатели считают, что прекрасное – объективная закономерность, которая рождается в недрах природы, но они не могут ответить на вопрос: «Почему светская красавица не нравится простолюдину, а дородная, пышущая здоровьем жительница деревни не по вкусу скрупулезному снобу?» Обществоведы считают прекрасное результатом человеческого творчества, но не могут объяснить свое очарование морскими или горными пейзажами, которые прекрасны, но не являются результатом человеческого творчества. Истиной, возможно, является золотая середина: прекрасное имеет как природную, так и человеческую, общественную основу (А. В. Волошинов,2000),

Однако истинно то, что прекрасное неразрывно с жизнью человека. Для сохранения бытия и вида в разнообразии предметов и явлений человеческие инстинкты имеют широкие возможности выбора, что они и делают, исходя из такого соединения порядка и хаоса, симметрии и асимметрии, движения и неподвижности, простого, сложного и полезного, которое характеризуется как прекрасное. И для выбора человеку дано то чувство прекрасного, тот вкус, которые дают возможность юноше найти и выбрать в своем окружении из многочисленных девушек ту единственную, которая станет матерью его детей. Именно это чувство прекрасного делает ценным для человека окружающий мир, предметы и явления, жизнь в целом.

В своей прекрасной книге (А. В. Волошинов,2000), автор представляет волнующый пример размышлений о расставании с жизню: «великий поэт Генрих Гейне, доживавший последние минуты жизни, собрав последние силы, направился к Лувру и долго стоял перед мраморной статуей Венеры. “Неужели я больше не увижу это чудо?” - подумал поэт» Другой художник –армянский композитор Дживани попрощался с жизнью, произнеся: «Неужели я больше никогда не услышу песни Ширина?» Оба художника ценность жизни, горечь ее потери обусловливали с прекрасным, с трудностью расставания с прекрасным и, казалось, подтверждали слова Федора Достоевского: «Без прекрасного человек, возможно, не захотел бы жить в этом мире».

**Образующие признаки научной эстетики в процессе**

**обучения математике**:

 **Порядок**

Порядок во все времена считался основным принципом организации в природе. Он противопоставлялся хаосу и рассматривался в качестве источника красоты. В античные времена порядок в первую очередь связывался со Вселенной. «Вероятно, первым, кто заговорил о космическом/Вселенском порядке, был Пифагор, причем, пифагорейцы подтверждением» такого порядка считали числа (А. Аврелий, 2017). Платон использовал идею порядка в процессах формирования всех областей эстетической, социальной, государственной жизни, человеческого тела, души. Концепции порядка большое внимание уделял Аристотель. Он приписывал порядок, в первую очередь, числам и связывал его с эстетикой, исходя из того, что « … самые главные формы прекрасного, это – порядок, соразмерность и определенность, – математические науки больше всего и показывают именно их. И так как эти стороны, очевидно, играют роль причины во многих случаях …, отсюда ясно, что указанные науки могут в известном смысле говорить и про причину такого рода – причину в смысле прекрасного» (Ю. Б. Борев, 1960). Прекрасное у Аристотеля не отождествляется с благим, которое «… всегда выражено в действии, между тем прекрасное бывает и в вещах неподвижных …, поэтому те, по словам которых математические науки ничего не говорят о прекрасном или о благом, находятся в заблуждении» [там же]. На самом деле именно математика говорит о прекрасном, выявляя «важнейшие виды прекрасного – слаженность, соразмерность , и определенность» (Ю. Б. Борев, 1960).

 Создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики Рене Декарт считал, что «порядок освобождает мысль» , а пионер архитектурного модернизма и функционализма XX ст. ле Корбюзье2 убеждал современников: «… гармония формы, , интенсивно воздействует на наши чувства, вызывая эстетические эмоции и эмоциональный отклик …, пробуждает в нас глубокие резонансы, задавая меру порядка, которая помогает нам понять красоту» (Le Corbusier, 1923). И «насколько идеален порядок, настолько спокойно и уверенно чувствует себя человек» [там же]. И естественна колоссальная роль порядка и его эстетики в математике, который выступает также языком золотой книги природы, способом выражения ее закономерностей. По Норберту Виннеру наивысшим призванием математики является нахождение порядка в окружающем нас хаосе. И не только математика, но и наука в целом имеет предначертанием признавать реальность, искать и утверждать порядок в хаосе мира. Однако, в отличие от других наук, порядок в математике выступает не только в качестве исследовательского инструмента, но также является одним из основных принципов формирования содержания.

 В качестве принципа формирования порядок в той или иной мере выступает в самых различных областях математики. Во-первых, в самом общем виде порядок определяется в произвольном множестве, что служит ключом одной из основополагающих идей современной математики, давшей начало теории упорядоченных множеств. Затем, на основе порядка строится одно из интереснейших направлений современной алгебры – теория структур. В единстве порядка и алгебраических операций берет начало теория упорядоченных алгебраических систем (теория упорядоченных групп, колец и т.д.) – еще одно интересное направление современной алгебры.

 Идея порядка позволяет определить одно из важнейших понятий математического анализа – последовательности. Это понятие также лежит в основе математической индукции, одного из базовых математических методов выявления истины. Отметим еще, что в математике порядок находит самое простое и важное свое проявление в идее упорядоченных пар, а последняя лежит в основе таких фундаментальных понятий, как эквивалентность и функция.

 Упомянутые выше, а также другие, связанные с порядком, математические теории имеют прикладной характер, и, следовательно, дают возможность исследовать природу. С этой точки зрения незаменимую роль играет порядок, проявляющийся в виде равенства, неравенства и нестрогого неравенства.

 Отдельно следует заметить, что в большинстве своем математика представляет собой науку о различных равенствах, неравенствах и их доказательствах. С этой точки зрения порядок выступает математическим исследовательским методом: с его помощью выявляются не только взаимоотношения между математическими объектами, но и закономерности природы. Наконец, равенства и неравенства являются важнейшими инструментами выяснения истины – если научная закономерность представляется в виде равенства или неравенства, то она считается безусловно истиной.

 Смежные, либо обусловленные порядком разделы математики существенно не отличаются своей эстетичностью. Лишь следует отметить, что задействование отношения порядка придает исследуемому математическому материалу дополнительные эстетические оттенки. А равенства или неравенства, процессы их исследования и доказательства всегда сопровождаются непредсказуемо- стью, ясностью, точностью, логической строгостью и другими признаками эстетики математики.

 Эстетическая привлекательность математических объектов, обусловленная порядком, присуща исследованиям Джорджа Биркгоффа, Генри Айзенка, Геннадия Саранцева и других. Биркгофф и Айзенк хоть и радикально различным образом подходят к исчислению меры M усилий в восприятии эстетичности математического объекта (С) с использованием формул M = O/C и M = O∙С, но сходятся в том, что эстетичность объекта обуславливается его порядком (О).

 В школьном курсе математики порядок также играет ключевую роль и является важным источником эстетической привлекательности соответствующих построений. Фактически порядок является одним из основных принципов компоновки учебного материала. Использование дидактического принципа систематичности и последовательности в изложении материала, упорядочивание прикладного фона курса (адаптация с математическим материалом), характеристика математических и прикладных объектов посредством отношения порядка – эти и другие подобные процессы демонстрируют ту уникальную роль, которую играет порядок в школьном курсе математики и в процессе ее изучения. При этом реализация функций порядка сопровождается многими объективными и субъективными признаками математического прекрасного, его внутренними и внешними проявлениями (Г. С. Микаелян, 2015).

 На протяжении многолетнего процесса обучения с самых первых шагов ученик имеет возможность заметить, что «математика вносит порядок в окружающий нас хаос». Действительно, понятия «право» и «лево», «вверх» и «вниз», «большой» и «маленький» уже являются прекрасными примерами выражения порядка и его эстетического признака, с которыми ученик знакомится еще в первом 30 классе. А использование натуральных чисел? Здесь, наряду с подсчетом, проявляется функция нумерации натуральных чисел, отличающаяся полезностью, применимостью и другими признаками математического прекрасного. Впоследствии идея упорядочивания натуральных чисел распространяется на целые, рациональные и действительные числа, используется для введения понятия числовой прямой, упорядочивания именованных чисел и с помощью последнего прокладывает путь к различным приложениям математики. Все эти процессы сопровождаются полноценными эстетическими проявлениями, сопровождающимися действием эстетических признаков единства многообразий и всеобщности.

 В школьном курсе математики, наряду с отношениями равенства и неравенства, порядок выступает в качестве способа «расположения» (упорядочения) учебного материала, определения сущности отношений между понятиями в рамках отдельных разделов и тем, реализации последовательности доказательств и других формах. Так, например, когда мы совмещенно (то есть, на уровне одного и того же множества) изучаем различные действия и отношения, то для введения порядка необходимо наличие определенного «согласования» между используемыми действиями и отношениями. Порядок требует, чтобы, к примеру, при совместном рассмотрении операций сложения и умножения натуральных чисел, между ними было установлено некое «согласование», выражающееся распределительным законом. Появление и утверждение порядка подобным способом является фундаментальным подходом для всех математических структур. Введение порядка придает дополнительную эстетическую привлекательность объектам и процессам, а также способствует их соответствующему упорядочению в пределах действия других операций. Например, исходя из того, что действия сложения и умножения целых чисел связаны распределительным законом, следует, что действия вычитания и умножения должны быть тоже связаны распределительным законом.

 На числовых множествах устанавливается также “согласования” между операциями сложения и умножения и понятиями больше/меньше следующим образом.

 Для произвольных целых чисел a, b, c:

* если a<b, то a+c<b+c;
* если также 0<c, то ac<bc.

Аналогичным образом согласуются между собой порядок и операции сложения и умножения на множествах рациональных и действительных чисел. Отмеченный процесс упорядочения можно продолжить также для комплексных числах, например, следующим образом:

$a+bi<c+di⇔a<c или a=c и b<d$ , a, b, c, d $\in $ R:

 Упорядочение комплексных чисел можно произвести по модулям и аргументам или многими другими способами. Однако самое интересное заключается в том, что, как бы мы не определяли порядок, вместе с действиями сложения и умножения комплексных чисел, выше отмеченная связь не может быть осуществлена.

 Действительно, предположим, что это возможно, т.е. если a<b, то a+c<b+c, а также если 0<c, то ac<bc, где a, b, c – комплексные числа. Сравним комплексные числа i и 0. Возможны два варианта: 0<i либо i<0. В первом случае получим 0∙i<i∙i или 0<–1. При добавлении 1 к обеим частям последнего неравенства получим 1<0, а при умножении обеих его частей на число большее 0, то есть –1, получим –1<0. В результате приходим

к противоречию с неравенством 0<–1. Нетрудно убедиться и в том, что к противоречию

сведется также случай i<0.

Таким образом, как бы мы не вводили отношение «меньше» (или «больше») во множестве комплексных чисел, его невозможно будет согласовать с операциями сложения и умножения. Поэтому во множестве комплексных чисел порядок и не вводится.

 Эстетическая привлекательность произведенного рассмотрения обусловлена также признаками неожиданности и непредсказуемости научной эстетики. В то же время оно показывает, что эстетический признак единства многообразий не может быть неограниченным, оно может быть распространено только на определенной группе предметов.

 Порядок, эстетический подход позволяют приходить к правильным выводам и решать самые различные методические задачи. Рассмотрим, например, такую важную проблему методики преподавания математики, как проектирование курса алгебры средней школы, и, в частности, определение места расположения материала о неравенствах.

Что касается неравенств, у специалистов нет единого мнения о подходах к их изучению. Некоторые специалисты полагают, что необходимо этот материал излагать в рамках одной темы. Другие, наоборот, считают целесообразным смешение содержания темы с общим алгебраическим материалом. Однако приемлемое решение может быть найдено, исходя из структурных приоритетов проектирования алгебраического материала с учетом практики построения теорий в математической логике (Э. Мендельсон, 2013): основу теории образуют три множества символов: множества предметных и предикатных символов и символов операций. С помощью этих символов сначала определяются термы теории, а затем и формулы. Часть формул принимается в качестве аксиом, из которых затем посредством правил вывода получаются теоремы теории.

 Описанный подход носит общий характер и может служить продуктивным ориентиром для построения школьного курса математики – размещения и упорядочения в нем учебного материала. Не вдаваясь в подробности, отметим, что для курса алгебры вопрос выбора множеств символов решается в рамках алфавита алгебры, где наряду с числами, символами греческого и латинского алфавитов, величинами, включается также прикладной фон математики. Алгебраические операции сложения, вычитания, умножения и деления, являющиеся основой операций возведения в степень, извлечения корня и др., выступают в качестве стержней, вокруг которых группируется остальной материал.

 В качестве основных понятий и отношений принимаются равенство, порядок (или виды неравенства), принадлежность элемента к множеству и т.д. Рассмотрение каждой из операций строится, исходя из отношений рассматриваемых формул и операций. Например, авторский учебник «Алгебра–7» (Г.С. Микаелян, 1999, 2006). называемый «Азбукой алгебры», состоит из пяти глав. Первая глава озаглавлена «Алфавит алгебры» и посвящена символам алгебры. Во второй главе предлагаются к рассмотрению сложение равенств, сложение неравенств, а также практические применения сложения. Таким же образом построены и другие главы, посвященные остальным основным операциям алгебры: вычитанию, умножению и делению.

 Предлагаемое к изучению содержание отличается эстетической привлекательностью, отражая естественный ход вещей и позволяя помимо порядка включить в процесс обучения также точность, простоту, единство многообразий и другие признаки математического прекрасного.

 **Симметрия**

 Представления людей о симметрии формировались в течение тысячелетий. В этих представлениях симметрия выступала как характерный элемент чего-то правильного, прекрасного и совершенного, как выражение определенности, порядка, гармоничного регулирования. Велика роль симметрии в природе: это один из образующих принципов природы, которому подчиняется как живой мир, так и неживой.

 Неживой мир, не имея целью движение, под действием сил притяжения всегда стремится принимать более стабильное состояние, чему способствуют различные симметричные структуры. При этом симметрии формирующегося неживого тела подчиняются симметриям среды. Иная картина характерна для живого мира. В нем для существования объекту необходимо сохранять равновесие, двигаться, а, значит – преодолевать действие силы притяжения Земли и других сил, что обеспечивается с помощью соответствующих структурообразующих свойств формы. При решении таких задач между структурными элементами формы задействуются различные сравнения и симметрии. Так, например, для дерева ключевое значение имеет направление силы тяжести. Поэтому дерево тянется вертикально вверх, а симметрии формируются по отношению к оси, проходящей через его ствол. Для животных, кроме направления силы тяжести, важным является также направление их движения. Потому для них характерна зеркальная симметрия, плоскость которой проходит через векторы, имеющие вертикальное направление и направление движения. Такого родсимметрии дают животному возможность не только легко принимать вертикальное положение, двигаться вперед, но также поворачиваться направо и налево. Лучшая из симметрий животного мира – симметрия пятого порядка или поворот вокруг центра на 72 градуса, чем и, в некотором смысле, обусловлено существование животного мира. По этой причине она называется также симметрия жизни. Пятипорядковой симметрией наделены морские звезды, морские ежи, цветки различных растений и многие другие структуры. Симметрия жизни тесно связана со специфичным для животного мира соотношением – золотым сечением, о чем пойдет речь далее.

 А почему симметричное сочетается с прекрасным и приятным взору? Симметрию в природе можно встретить всюду, практически на каждом шагу. Постоянное общение с нею делает ее приятной взору. Если, например, попробуем изготовить что-то с применением двух видов симметрий: горизонтальной и вертикальной, то приятным окажется изготовленное с вертикальной симметрией, поскольку именно эта симметрия встречается повсюду. А горизонтальная симметрия встречается лишь в случае отражения в воде какой-либо картины природы.

 Симметрия воспринимается человеком как проявление в природе закономерности и порядка, присутствие которых приятно человеку: оно придает ему уверенность. Таким образом, симметрия, воспринимаемая человеком как закономерность, как «внешнее проявление внутреннего порядка», обретает для него эстетическое значение и воспринимается как приятное и прекрасное.

 Симметрия, в качестве объективного признака прекрасного, выступает на протяжении всей истории искусства. Она играет значительную роль как в архитектуре и скульптуре, так и в живописи. Симметрия имеет большое значение в представлении предметов и явлений природы. Она, является важнейшим компонентом прекрасного, стимулирует познание и помогает понимать закономерности природы и воспринимать прекрасное. По этой причине исследованием симметрии занимались физика, химия, кристаллография и другие естественные науки, архитектура, живопись, музыка, хореография и другие области искусства.

 Симметрия является также важным математическим понятием и, естественно, предметом исследования. В широком смысле симметрия в математике – бинарное отношение ~, которое характеризуется тем, что если объект α находится в отношении ~ с объектом β, то объект β также находится в отношении ~ с объектом α. Иначе говоря, если имеет место α~ β, то также имеет место β~ α. Например, социокультурные отношения «учится в той же школе», «является членом той же семьи», «гражданин той же страны» и т.п. – это симметрии. Однако социокультурные отношения типа «является родителем», «любит», «ненавидит» – не являются симметричными. Симметриями являются также отношения равенства чисел, выражений, фигур, тел, подобия фигур и т.д.

 Учитывая базовое значение понятия равенства для математики и для ее школьного курса, а также роль подобия в курсе геометрии, можно с уверенностью сделать вывод, что симметрия, вообще говоря, может стать одной из образующих идей школьного курса математики.

 В узком смысле или при более распространенном подходе симметрия трактуется как преобразование множества, сохраняющее различные признаки элементов этого множества. Подобными признаками в геометрии могут быть подобие, длина, совпадаемость (фигур) и т.д., а в алгебре – операции алгебраической структуры, совпадаемость элементов подструктур, корни многочленов и т.д. (Г. С. Микаелян, 2014).

 В курсе геометрии общеобразовательной школы в качестве симметрии рассматриваются те движения плоскости или пространства, при которых фигуры отображаются сами на себя. И именно этот вид отображений воспринимается в искусстве как симметрия и имеет бóльшую эстетическую привлекательность и бóльший потенциал формирования прекрасного. В школьному курсе геометрии в числе подобных симметрий рассматриваются симметрии по отношению к точке и прямой. С их помощью строятся симметрии прямоугольника, ромба и некоторых других фигур. В школьном курсе алгебры «геометрические» симметрии используются при построении графиков функций. Однако же появляются и симметрии алгебраического характера: связанные с видом многочленов, установлением определенных отношений между переменными, корнями.

 Присутствие симметрии придает математическому объекту некую красоту. Более того, чем больше этих симметрий, тем более красивым и приятным взору кажется (является) объект. Неправильный треугольник, например, имеет только одну симметрию, задаваемую тождественным преобразованием плоскости. Равнобедренный треугольник, помимо симметрии, задаваемой тождественным преобразованием, имеет еще и симметрию относительно перпендикуляра, проведенного из вершины третьего угла к основанию. Равносторонний треугольник имеет уже шесть симметрий – три поворота вокруг центра на 0, 120 и 240 градусов соответственно и три симметрии относительно трех перпендикуляров, проведенных из каждой его вершины к основаниям. Из этих треугольников более красивым будет казаться правильный треугольник. Среди плоских фигур окружность имеет бесконечное число симметрий, что и обеспечивает ее совершенную красоту. Прямая также имеет бесконечно число симметрий, однако, в отличии от окружности, множество симметрий здесь обеспечивается за счет бесконечности прямой, что делает ее менее привлекательной, чем окружность. Точка плоскости имеет только одну симметрию, симметрию, задаваемую тождественным преобразованием плоскости. По этой причине рассмотрение в школьном курсе геометрии симметричных фигур придает эстетическую привлекательность, как учебному материалу, так и учебному процессу в целом. Однако надо заметить, что в курсах математики общеобразовательных школ (и сейчас, и в прошлом) полноценно не задействуется учебное и воспитательное (с точки зрения формирования ценностей) значение симметрии. Хотя для этого имеются очень большие возможности.

 Проведем лишь несколько общих замечаний в этом направлении.

 1) Расширение и углубление границ представлений о симметрии в школьном курсе математики будет способствовать углублению процесса познания вообще, расширению прикладного фона математики не только в природе и в используемых ее науках, но также в различных областях искусства.

 2) Понятие симметрии имеет широкие и разнообразные теоретические и прикладные возможности включения в школьный курс математики – с первого до последнего класса.

3) Серьезное присутствие в содержании школьного курса математики идеи симметрии может дать дополнительные возможности единства и эстетической привлекательности математики, повысить интерес учащихся к ее изучению.

 4) Симметрия может выступать в качестве интегрирующей идеи для ряда учебных предметов общеобразовательной школы. Базовым предметом для 39 реализации этой идеи как нельзя лучше подходит математика, охватывая проявления симметрии в физике, химии, естествознании, биологии, искусстве, литературе.

 В работе (A.M. Цатурян, 1991)., например, рассматриваются межпредметные связи физики и математики в контексте симметрии. Понятно, что математическое понятие симметрии, ее различные применения в отмеченных областях настолько широки, что для каждого образовательного уровня можно найти соответствующий материал для интеграции во всех отмеченных областях. 5) Интегрированное изучение идеи симметрии может способствовать процессам формирования мировосприятия, мировоззрения учащихся.

 **Сравнение**

 Сравнение – один из основных приемов мышления, важнейший метод познания. Посредством сравнения мы можем выяснить сходство и различие предметов, выявить наличие или отсутствие у них общих свойств. Сравнение также является средством выявления прекрасного, инструментом формирования эстетических ценностей. Не зря говорят, что красота познается в сравнении.

 **Золотое сечение**. Хотя симметрия имеет важное значение как компонент прекрасного, надо заметить, что она придает некую неподвижность, окаменелость изображению. Для настоящего прекрасного необходимо сочетание симметричного и ассиметричного. Сравнение как раз и дает возможность ответить также на вопрос: «В каком соотношении надо сочетать 40 симметричное и асимметричное для получения прекрасного?» Рассмотрим варианты деления одного и того же отрезка, проиллюстрированные на рисунке ниже.

 Рис. 1

В первом случае отрезок разделен на две равные части – выполнено симметричное деление, и полученное изображение уравновешенно и одновременно неподвижно. Во втором случае точка деления близка к одной из крайних точек. Получившееся изображение весьма неуравновешенно и неспокойно. И только в третьем случае некая «золотая середина» в соотношении частей обеспечивает желанное единство симметричного и асимметричного, придавая изображению и спокойствие, и движение, и красоту, и не вызывая чувства неподвижности или беспокойства. Приятное взору подобное деление отрезка интересовало мудрецов древнего мира, начиная с египтян. Пифагор называл его золотым сравнением. Найдем его численное выражение. Если отрезок а разделить на части b и с так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

то как раз и получим то, что следует считать золотым сравнением (рис. 2)..



 Рис. 2.

Оно во все времена широко применялось в искусстве. Леонардо да Винчи назвал его Sectio aurea, то есть золотое сечение, а Иоган Кеплер – Sectio divina – божественное сечение. Божественное сечение вместе с теоремой Пифагора Кеплер считал двумя сокровищами геометрии. После да Винчи и Кеплера выяснилось, что золотое сечение связано со многими естественными явлениями, закономерностями. Оно широко представлено в животном мире, в частности, строении человека. Будучи законом природы, воплощением божественного промысла, золотое сечение также является законом прекрасного, человеческого творения и встречается в разных цивилизациях, разных эпохах, разных областях искусства. Если в приведенном выше равенстве обозначим a = 1, b = φ, то получим также

c = 1 + φ и φ : 1 = (1 + φ) : φ или φ2 = φ + 1, откуда получим



Это значение числа φ, выражающего золотое сечение. Оно также называется коэффициентом золотого сечения. Можно показать, что коэффициент золотого сечения не рациональное число, то есть оно не может быть равным частному двух целых чисел. В повседневных расчетах обычно пользуются приблизительными значениями иррациональных чисел. Для коэффициента золотого сечения с точностью до 0,001 имеем φ≈1,618. Обратное число 1/φ (с точностью до 0,001) будет 0,618.

Действительно, 1,618∙0,618≈1. Число φ также можно представить в виде бесконечной последовательности вложенных квадратных корней вида:



**Числа Фибоначчи**. Первым в Средневековой Европе и величайшим в свое время математиком был Леонардо Пизанский, известный как Фибоначчи. Леонардо был торговцем в Пизе и, как и другие итальянские торговцы, долго путешествовал на Востоке, был в Египте и Междуречье и, в отличие от своих коллег, вместе с товарами привез оттуда не характерные торговцу, но очень важные другие ценности – математические знания. Эти знания он обобщил в своей книге на латинском языке «Liber Abaci» («Книга об абаке»), написанной в 1202 году. Она была предназначена именно для торговцев и содержала много полезных для того времени знаний об арифметике и алгебре. В этой книге Фибоначчи рассматривает примечательную задачу о кроликах, решение которой стало причиной появления важного математического понятия. Эта задача о кроликах такова.

Один человек помещает пару кроликов в огражденный участок. Сколько пар кроликов окажется там через год, если пара кроликов рождает новую пару раз в месяц, и кролики рожают в первый раз, когда им исполняется два месяца. Решим эту задачу Леонардо. В первые два месяца у нас не будет прироста: останется одна пара. В третьем месяце уже будем иметь две пары кроликов, в четвертом – пять, и в каждом последующем месяце число кроликов будет равняться сумме количеств пар кроликов предыдущих двух месяцев. Таким образом, получим следующую последовательность чисел, названную именем Фибоначчи:

1,1, 2, 3, 5, 8,13, 21, 34, 55, 89,144, 233, 377, 610, 987,..

Числа Фибоначчи тесно связаны с золотым сечением и его коэффициентом. Действительно, если мы каждое из них, начиная со второго, последовательно разделим на предыдущее, то получим новую последовательность, члены которой неограниченно приближаются к коэффициенту золотого сечения или, как принято говорить в математике, предел полученной последовательности будет равен коэффициенту φ золотого сечения. Эту закономерность впервые заметил Йоганн Кеплер. Эта связь чисел и золотого сечения совсем не случайна: как и золотое сечение, числа Фибоначчи имеют широкое применение в самых разных явлениях природы, искусстве и разных отраслях науки. Можно только удивляться разнообразию этих применений. Исходя из этого, деление на части любого предмета соотношением последовательных чисел Фибоначчи также называют золотым сечением. Однако, в отличие от золотого сечения, которое также называется пифагоровым или иррациональным золотым сечением (так как его коэффициент φ иррационален) подобное деление называют рациональным золотым сечением, так как полученные частные являются отношениями целых чисел.

**Сравнения в школьном курсе математики**. Сравнения имеют большое применение, как в математике, так и в ее школьном курсе. На основе сравнения вводятся такие базовые понятия математики, как равенство, уравнение, эквивалентность и неравенство. Сравнение служит основой для формирования важнейшего понятия функции, а также измерения величин. В частности: скорость автомобиля – сравнение пройденного пути и затраченного времени, цена товара – сравнение массы (или количества) продаваемого и количества потраченных на покупку денег и т.д. Вообще говоря, в результате сравнения разнородных величин формируется общее понятие рейта – сравнения двух разнородных величин в виде отношения. Понятие рейта, кроме общности, примечательно также признаками ясности, четкости, единством разнообразий и другими объективными признаками научного прекрасного, что придает учебному процессу большую эстетическую привлекательность (Г.С. Микаелян, 2003, 2014).

Процесс сравнения понятий алгебры и геометрии, включая их свойства, приводит к появлению и применению метода координат, роль которого в математике общепризнана. Превосходными проявлениями сравнения являются синус, косинус, тангенс и котангенс угла или числа, логарифм числа и другие понятия, получаемые посредством сравнения чисел, выражающих глубокие математические закономерности и имеющие большое прикладное значение. Однако, как в математике, так и в ее преподавании, процессы, которым сопутствуют сравнения, наделены также другими объективными и субъективными признаками, что придает этим процессам большую привлекательность.

Отметим также, что термин «сравнение» в математике впервые встречается у Цицерона для выражения связи вида 𝑎 𝑏 = 𝑐 𝑑 между величинами а, b, с, d. В этом смысле сравнение называется также пропорцией (лат. proportion – соотношение, уравнивание частей). Однако заметим, что такие важные виды сравнения, как золотое сечение и числа Фибоначчи со своими прикладными и эстетическими широкими возможностями также имеют право занимать место в школьном курсе математики, откуда они несправедливо выпали.

**Гармония**

Гармония является одним из важнейших элементов эстетики и имеет тысячелетнюю историю. Философская и эстетическая мысль в разные времена обращалась к этому понятию, используя разнообразные толкования. Однако до сих пор единого мнения относительно истолкования понятия гармонии не выработано. Потому среди толкований этого понятия можно встретить такие варианты:

− согласованность частей целого, в соответствии с эстетическими законами (Философский энциклопедический словарь, 2010).

− культурное положение, направленное на мировую структуризацию с позиции внутреннего регулирования, на отдельные ее части, а также на человека и понимание его жизни (O.П. Мороз, 1989)

− категория, отражающая естественный характер развития реальности, внутренней и внешней согласованности эстетического объекта, целостность и соразмерность его содержания и формы (Философская энциклопедия, 1960),

− симметрия отдельных частей объекта, слияние различных его компонентов в одно органическое целое (Большой энциклопедический словарь, 2002),

− согласованность частей разъединенного целого, которая диктуется эстетическими законами (Философский энциклопедический словарь, 2010),

− соразмерность частей с целым и друг с другом (Словарь иностранных слов, 2014).

Гармония проявляется повсюду: начиная с Солнечной системы и Вселенной до мельчайших частиц природы, от генов каждого отдельного человека и общественных структур до общества в целом. Одним из замечательных примеров гармоничности природы является гармония между животным и растительным мирами, что проявляется в роли обоих миров в жизни друг друга: растения дышат углекислым газом и выдыхают кислород, животные дышат кислородом и выдыхают углекислый газ. Все научные открытия, законы и закономерности, так или иначе, являются утверждениями гармоний, существующих в мировой структуре. Гармония материального мира определяет закон сохранения материи и ее трансформации; гармония движения – закон инерции; гармония живого и неживого мира – естественные науки; гармония человека и окружающего мира – психологию, физиологию; гармония человека и социума – социологию и другие общественные науки; гармония между Вселенной и 46 человеческого разума – философию, а гармония чувств – искусство.

**Гармония и математика**. Рассмотрение отношений между гармонией и математикой начиналось еще в античный период и прямо или косвенно отражалось на протяжении всей истории эстетики. В античное время Пифагор и пифагорейцы в основу гармонии ставили число и числовые отношения. Без числового отношения невозможно объяснить как золотое сечение, так и гармонию музыки. С их, как и с платоновской, точки зрения, в деле формирования вселенской гармонии большую роль сыграли равносторонние многогранники и эту гармонию можно выразить посредством числовых сравнений (Лосев, А.Ф., 1965).

В восприятии гармонии большое место математике выделял Аристотель. Размер, величина, порядок, симметрия, с помощью которых Аристотель определял гармонию, также имеют буквальное математическое содержание. В эллинистическую эпоху также выделяли особую роль математики в формировании гармонии. В эстетическом подходе к гармонии стоики выделяли важность роли числовых сравнений в музыке. В этом плане Цицерон обращался ко вселенской музыке, рожденной в процессе движения небесных тел. А Марк Витрувий в основу своей эстетики ставил идею соразмерности (что по своей сути вытекает из гармонии) добавляя к ней вычисляемые математические сравнения. Средневековая эстетика также уделяет значительное внимание отношениям гармонии с математикой. Аврелий Августин в деле формирования гармонии и, в целом, эстетики большое значение отводил числу. В частности, на первый план он выдвигал математическое восприятие музыкальной гармонии [1]. Другой мыслитель раннего Средневековья Боэций свои математические подходы к искусству и к гармонии сводил кчисловой гармонии в музыке (Boethius, 1995). Вообще, сведение гармонии к количественным отношениям посредством математических сравнений – самая яркая тенденция средневекового восприятия (толкования) гармонии, что особенно отчетливо просматривалось в музыке (музыка в то время считались сферой математики). В позднем Средневековье, в особенности в готической архитектуре, математика имела широкое участие. Геометрические фигуры – равносторонний треугольник и четырехугольник – выступали в качестве эстетических формообразующих элементов архитектурных сооружений и создавали уникальность в выражении гармонии. В то же время для Средневековья характерно было теологическое восприятие эстетики и гармонии, представление их как божественных творений, что, однако, было далеко от математических обоснований.

 В подходах искусствоведа эпохи Возрождения Леона Альберти число либо числовые сравнения, а также ограничения, определяемые геометрическими фигурами, рассматриваются как компоненты архитектурной гармонии. В работах Луки Пачоли, Леонардо да Винчи, Альбрехта Дюрера сравнение и, в частности, золотое сечение как компонент гармонии, используются для идеального представления частей тела человека и получают соответствующее математическое выражение. Это послужило основой для создания перспективы и гармонии посредством нее, что способствовало развитию ренессансной живописи. Готфрид Лейбниц, следуя средневековой традиции, считает, что суть музыкальной гармонии природы содержится в природе числа, и все очарование музыки лежит в числовых отношениях, которые человек чувствует подсознательно. «Музыка для души – это арифметическое упражнение, при этом, душа не осознает, что он занята исчислениями самого себя». Он считает, что на основе 48 математики появляются гармонии в других формах искусства, приносящих не только аудиальное или визуальное удовольствие. «Математика – это поэзия гармонии», – заключает Лейбниц. В последствии эстетическая мысль придает больше значение не количественному, а качественному составляющему гармонии, что изрядно снижает потребность в математике в данной области. Однако при этом следует выделить Георга Гегеля, который в своем обширном учении о гармонии представил математическое понимание гармонии, сочетая его с понятиями каноничности и симметрии.

 Связь гармонии и математики не ограничивается лишь искусством и эстетическими подходами. Определение Галилео Галилея «книга природы написана на языке математики» является, вероятно, лучшей характеристикой гармонии математики с природой. Сегодня невозможно представить себе природу, естественные науки и исследования техники без математики. Причиной является наличие гармонии. Именно она послужила для Владимира Волькенштейна основой для того чтобы сделать следующий вывод: каждая четкая и последовательная математическая формулировка научных достижений оставляет эстетическое впечатление (В. М. Волькенштейн, 1931). Гармония с природой дает возможность математике и ее мощному аппарату быть вовлеченной не только в естественные и технические, но и социальные науки, а также другие области человеческой жизнедеятельности, делая ее одним из ключевых факторов социального прогресса. Гармония широко проявляется и в математике, становясь одним из наиболее важных принципов эстетической привлекательности ее архитектурной структуры. Число, сравнение, размер, величина, геометрическая фигура, симметрия и другие математические понятия, участвующие в создании гармонии, придают эстетическую привлекательность объектам и явлениям природы и искусства не только потому, что «книга природы написана на языке математики», но и потому, что сама эта математическая книга написана красиво (если не сказать «логично красиво»).

 Одним из основных принципов, лежащих в основе этой красоты, является гармония между математическими объектами. Но необходимо заметить, что гармония в математике отнюдь не сводится лишь к математической гармонии, отражающей количественные выражения вещей и явлений или же к их сущностное проявление. Все математические теоремы – это проявление внутренних связей между объектами, закономерностей или же гармоний. И что удивительно, изначально обладающая мотивами гармонии с природой математика развивается, исходя из своих собственных законов и закономерностей, в соответствии со своими принципами гармонии. Таким образом создаваемая и генерируемая новая математика находит свое применение в исследовании природы, что, опять-таки, гармонизирует с природой.

 Гармония также является одним из основных принципов образования математики. С одной стороны она выражается в беспрецедентной согласованности природы и математики: мысленные абстрактные объекты математики описывают объекты природы, явления и закономерности. С другой стороны, абстрактные ментальные образы переплетаются друг с другом на первый взгляд невидимыми нитями, а их единство создает прекрасную архитектурную структуру, которая еще со времен древних греков имела заветное название «математика». Эта архитектурная структура, как единство внутренних частей и их объединение в целое, соответствует общему для греческого восприятия гармонии. Единство внутренних математических конструкций или частей структуры, то есть внутреннее единство отдельных 50 областей математики более чем очевидно. Эти части имеют тенденцию к объединению в целостную конструкцию, которая отражается в их взаимопроникновении, в общих методах исследования, в единстве математического языка и других характеристиках.

**Гармония и школьная математика**. Как известно, школьная математика не представляет собой науку математику и, вообще говоря, не является ее частью, либо сегментом. Взаимосвязи между математикой и ее школьным курсом – тема отдельного рассмотрения. Здесь мы отметим лишь то, что школьный курс математики, ориентируясь на общеобразовательные цели, включает в себя отдельные темы математики, а также содержит самые разнообразные материалы из областей ее применения в науке, технике, экономике, спорте и другие областях человеческой деятельности. Основные математические достижения являются опорой курса математики общеобразовательной школы. Первым признаком гармонии курса позиционируется внутреннее единство математических тем, что в методике математики характеризуется как «внутрипредметные связи». Добавим, что такое единство, являя собой частичное выражение признака научной эстетики – единства многообразий, также способствует повышению общей привлекательности эстетической архитектуры курса школьной математики. Такой принцип эстетики должен, прежде всего, использоваться в различных учебных математических дисциплинах.

Лучшим способом проявления гармонии в математике является идея Рене Декарта о системе координат. Она позволяет понятия алгебры и математического анализа связать с геометрическими фигурами, и наоборот. В результате точка ассоциируется с парой чисел, прямая – с уравнением первой степени с двумя неизвестными, окружность – с особым видом квадратного уравнения с 51 двумя неизвестными и т.д. В свою очередь, производная функции определяет направление движения точки по поверхности ее графика: если производная положительная, то точка будет двигаться вверх (по возрастающей) и т.д. Эта гармония, обнаруженная Декартом, позволяет использовать возможности разных областей математики при исследовании в каждой из них: алгебры, математического анализа, геометрии. Геометрия, например, дает возможности визуализации, алгебра и математический анализ – методы и приемы исследования и т.д.

 Гармония должна присутствовать и в отдельных учебных математических дисциплинах. В геометрии это выражается в аксиоматической конструкции курса, требующей дедуктивного доказательства теорем, их взаимосвязи, постепенного усложнения понятий и последовательности изложения материала. Все это позволяет представлять курс геометрии как единство частей, «налагаемых» друг на друга, «переплетаемых» горизонтальными и вертикальными связями, главным свойством архитектурного устройства которых является гармония. Курс алгебры средней школы также обладает широкими возможностями выражения гармонии при аксиоматическом, дедуктивном построении. Эти возможности были реализованы, например, в учебниках [87–89], где основами алгебраической архитектуры выступали алгебраические операции, отношения равенства, неравенства и некоторые другие, связывающими элементами для которых являлись свойства и зависимости.

 Еще одним источником гармонии в школьном курсе математики является прикладная направленность математики (или же прикладной фон). Такая ориентированность более характерна для школьной алгебры. Необходимо отметить, что дополнительную эстетическую привлекательность курсам математики придает единство на первый взгляд довольно далеких друг от друга теоретических (воображаемых) и прикладных (видимых) областей математики, а затем их практическое единение при изучении. Эстетическая привлекательность такого рода гармонии подчеркивается наличием признаков единства многообразий, всеобщности и применимости научной эстетики. Выше уже обращалось внимание на существующую гармонию между закономерностями природы и математики, между естественными науками, изучающими данные закономерности. Естественно, чтобы в школьных математических курсах предполагалось использование этой гармонии, ее выражение в каждом материале. Такой подход позволяет сделать более привлекательным изложение абстрактного математического материала, стимулировать мотивацию и интерес к его изучению.

 Следует признать, что принцип гармонии не всегда сохраняется и часто нарушается в математических курсах и учебниках математики внутри системы образования одной и той же страны. В работе [86], к примеру, нами отмечены многочисленные нарушения такого рода в советских учебниках. Не менее отчетливо они выражены и в нынешних учебниках. Достаточно отметить, что учебники геометрии естественно-математических потоков средних и старших школ Республики Армения основываются на совершенно различных аксиоматических системах. Имеющие место многочисленные нарушения принципа гармонии между курсами алгебры и геометрии, алгебры и математического анализа являются следствием непрофессиональной системы отбора учебников для общеобразовательных школ.

 **Гармония урока математики**. Вопрос гармонии школьного урока математики заслуживает отдельного обсуждения. Здесь на первый план выдвигается целый ряд вопросов, не имеющих, к сожалению, однозначного решения. 53 Несомненной истиной является тот факт, что урок, представляющий собой процесс изложения учителем учебного материала и его усвоением и восприятием учеником, должен быть единым, гармоничным целым. Но как достичь такой гармонии, когда класс состоит из десятков детей с различными способностями, предпочтениями и интересами? Причем в индивидуальные миры способностей, предпочтений и интересов большинства этих детей абстрактные идеи математики не укладываются, кажутся далекими от зарождающихся у них ценностных ориентиров, мыследеятельностных целей. Как создать столь важный для гармонии мир между двумя учениками с весьма различными способностями математического восприятия, когда оба они симпатизируют одной и той же девочке? Принимает ли учитель в этом случае во внимание возможные проявления зависти, чувства неполноценности и других негативных явлений, воздействующих на психику ребенка? Понимает ли учитель, что каждый раз, выставляя напоказ неспособность, беспомощность и негативное отношение ученика к математике, он отрицательно воздействует на психику ученика, снижая и придавая бледный оттенок его образу жизни? Нужен ли, в таком случае, этот урок ученику?

Возможно ли достичь гармонии посредством создания общей атмосферы доброжелательности? Терпимость, сострадание, взаимопомощь, благодарность – лучшие моральные качества для создания такой атмосферы, а ревность, злопамятность, мстительность, насилие, нетерпимость, враждебность, угнетение, месть, принуждение будут только препятствовать образованию этой атмосферы. Морально-этические качества должны быть присущи как учителю, так и ученику. Естественно, их влияние усиливается при их проявлении учителем. Учитель должен знать, что источником негативного отношения ученика к 54 учению могут быть упрямство, мрачность, неприветливость, суровость, высокомерие [90]. Для учителя важно обладать необходимыми профессиональными навыками и иметь большое сердце. Последнее ему необходимо для того, чтобы вмещать безжизненный математический материал в такие, казалось бы, «мелочи» жизни как солнечный день, новое платье девочки, направленные на нее взгляды, а также множество других мелочей, которые интересуют учеников, которыми полны их сердца и души. Приобщение к математике нескольких избранных в классе учеников (к чему сводятся уроки большинства наших учителей) не требует особого мастерства. Такие ученики могут изучать и успешно усваивать необходимую им математику без учителя.

 **Ритм**

 Ритм (греч. rhythmós, от rhéo – теку) изначально трактовался как воспринимаемая форма протекания во времени каких-либо процессов, основной принцип формообразования временных искусств (поэзия, музыка, танец и др.). Как отмечается в (http://vseslova.com.ua/word/Ритм-90798), “к пространственным искусствам это понятие применимо постольку, поскольку они предполагают развертывающийся во времени процесс восприятия. Многообразие проявлений ритма в различных видах и стилях искусства, а также за пределами художественной сферы … породило множество различных определений ритма, в связи с чем слово “ритм” не обладает терминологической чёткостью”..

В самом широком смысле ритм интерпретируется как «временная структура любых воспринимаемых процессов, образуемая акцентами, паузами, членением на отрезки, их группировкой, соотношениями по длительности и т.п.» [там же]. Часто ритм понимается как закономерное чередование или повторение и основанная на нём соразмерность; идеалом ритма считается точно повторяющиеся колебания маятника или удары метронома. «Эстетическое впечатление от таких ритмических движений объясняется «экономией внимания», облегчающей восприятие и способствующей автоматизации мускульной работы (например, при ходьбе) ...

 В поэзии … и музыке … противопоставляют метру и связывают не с правильной повторяемостью, а с трудно объяснимым «чувством жизни», захватывающей силой устремления вперёд …» [там же], основывающейся на сочетании соизмеримости (рациональности) и устойчивой повторяемости (статике), обеспечивающих эмоциональную и динамическую характеристики восприятия.

Ритм присутствует во многих явлениях действительности. Ритмичны движения космических тел: вращения спутников Солнца или вращение луны вокруг Земли, последовательность дней и ночей, цикличность времен года, рост растений и кристаллов. С ритмом может связываться не только движение предметов: ритмом может быть наделено также неподвижный объект: лес с расположением деревьев, растение с расположением веток и листьев, архитектурное строение с расположением окон, арок … Ритм воздействует на наши органы чувств: мы можем воспринимать его зрением, слухом, прикосновением и даже воображением. Ритмичны журчанье ручья, стук колес поезда, звуки музыки. Во всех этих случаях ритм проявляется сохранением определенных интервалов между звуками.

 Ритм может приносить радость или грусть, настроение торжественности, спокойствия или беспокойства. Небольшие колебания морских волн создают настроение покоя и умиротворения, а бушующее море ритмом своих грозных волн создает неспокойное настроение. Для получения желаемого впечатления от картины можно придать ей соответствующий ритм посредством расположения частей. Проявление ритма в горизонтальном направлении уменьшает ощущение высоты картины, а в вертикальном – ощущение меры проявления образующей закономерности и от частоты повторения. Чем большими будут соответствующие части картины и чем чаще они будут повторяться, тем сильнее будет проявляется ритм, и наоборот. Ритм – одно из важных средств выражения в искусстве, придающее произведениям композиционную завершенность и являющееся существенным компонентом в формировании образа. «С помощью того или иного ритмического строя художественные произведения … различную эмоциональную окраску. Ритмические построения достигаются с помощью различных элементов симметрии, а также чередованием или сопоставлением любых элементов композиционного характера — контрастами или соответствиями масс, отдельных предметов, линий, зафиксированных движений, светотеневых и цветовых пятен, пространственных членений и пр. Ритмическая организация способствует достижению гармонической ясности или острой экспрессии художественного образа, чёткости восприятия произведения» (http://vseslova.com.ua/word/Ритм-90798),

 Следует заметить, что в искусстве ритм не имеет математической точности. Он может быть пассивным или активным, разрывным или плавным и спокойным. Ритм может задаваться по следам линий, света, тени, цветов. Как закономерность, проявляющаяся в разнообразных явлениях действительности, ритм не может оставаться вне математики и ее школьного курса. Возможно, математические истоки возникновения и проявления ритма содержатся в транзитивности бинарного отношения: если первый объект находится в отношении μ со вторым, а второй – в том же отношении μ с третьим, то между первым и третьим объектами имеет место то же отношение μ. Наличие такого свойства у отношения, определенного на некоторой последовательности следующих друг за другом объектов (предметов), создает предпосылки к проявлению определенного ритма.

 В математике и школьном курсе математики отношения эквивалентности (равенства, подобия, равносильности и др.) и порядка (больше, меньше и др.) наделены свойством транзитивности, что обуславливает существенное проявление ритма в соответствующих отраслях математики. Импликация и эквивалентность математических формул (утверждений) также наделены свойством транзитивности, в результате чего мы приходим к ритму суждений. Средства языка математики позволяют выражать многие явления, протекающие с ритмом, и в их исследовании использовать богатый арсенал области знаний. Ритм движения тел и других явлений в лучшем виде описывается периодичностью соответствующих функций. Если обратимся к графикам (периодичных) функций, изображающих подобные явления, то увидим, что их отдельные части с определенной частотой повторяются, что показывает также силу ритма. Она зависит от отношения высоты и длины периода: чем большим оказывается это отношение, тем сильнее ритм.

 В школьном курсе математики рассматривается довольно широкий класс периодичных функций, в том числе тригонометрические функции. Но надо заметить, что обычно они не сопровождаются исследованиями, комментированием и объяснением ритмичности явлений действительности, лежащих в основе этих функций. Это снижает эффективность обучения и ослабляет эстетическую привлекательность изучаемого материала. Математические проявления ритма усматриваются также в арифметической и геометрической прогрессиях: в первой из них ритм характеризуется разницей, а во второй – частным. Существуют также другие характеристики, описывающие ритм конечных и бесконечных последовательностей.

**Объединяющие признаки научного прекрасного в**

**обучении математике**

Следующую группу объективных признаков научного прекрасного составляют объединяющие признаки. Объединение вещей, явлений, людей, обществ и т.д. организуется на основе общности определенных (некоторых) свойств и может иметь как положительное, так и отрицательное значение. Однако, в математике (как и в науке вообще) рассматривается только положительный эффект данного явления, а значит – все образуемые объединения считаются красивыми. Ниже мы рассмотрим такие объединяющие признаки научного прекрасного, как единство многообразий, всеобщность, применяемость и математические записи научных закономерностей.

**Единство многообразий и всеобщность**

Единство в многообразии – первый критерий, предложенный Френсисом Хатчесоном, как общий эстетический принцип для оценки прекрасного в природе и в науке (Д. А. Юм, 1973). Ярким проявлением единства многообразий и всеобщности оказывается понятие натурального числа: натуральное число ո отражает количественную равносильность любых ո-элементных множеств. При выявлении какого-нибудь свойства числа ո мы можем распространять его на любое множество, содержащее ո элементов. Число ո, как и вообще любую переменную x, мы можем рассматривать как объединение многообразий. В то же время переменная x может принимать любые числовые (и не только!) значения, что отражает ее всеобщность.

 Любое математическое (и не только математическое) понятие можно рассматривать как объединение всех элементов, образующих объем этого понятия. Подобное объединение является прекрасным потому как сближает, позволяя в одном классе или в одном понятии объединить разнообразие определенных элементов/объектов. Соответственно, любое истинное утверждение, касающееся этого понятия, будет истинным и для любого элемента из объема этого понятия. Например, понятием «треугольник» мы объединяем все многоугольники с тремя сторонами и, доказывая, что сумма внутренних углов треугольника равна 180 градусов, применяем этот факт к любому многоугольнику с тремя сторонами.

 Любая другая математическая теорема также имеет обобщенный характер: ее справедливость для некоторого широкого класса математических объектов является основанием для ее применимости как для подклассов этого класса, так и для его отдельных представителей. Применение теоремы для любого соответствующего случая или получение из нее какого-нибудь следствия Френсис Хатчесон связывает с прекрасным. Потому признак всеобщности принято считать вторым признаком прекрасного Хатчесона. К примеру, когда мы приходим к выводу, что площади треугольников с равными основаниями и высотами (или с одинаковыми произведениями основ и высот) равны, то используем теорему о площади треугольника, определяющей формулу S = ah/2 для ее вычисления. Фактически таким образом мы виртуально объединяем в один класс все многообразие треугольников, что является выражением научного прекрасного.

 Указанные признаки научного прекрасного, охарактеризованные Хатчесоном, широко проявляются в применениях математики в самых разнообразных отраслях науки и техники. Сами же эти применения математики выражают единство различных явлений, также утверждающие всеобщность математических теорем. Большие возможности для подобных проявлений научного прекрасного в самой математике дает метод координат, предложенный Рене Декартом и показывающий единство алгебры и геометрии. Первокурснику-математику университета, только-только знакомящемуся с элементами аналитической геометрии, знакомо чувство удовлетворения, появляющееся при применении простых алгебраических методов для решения некоторых геометрических задач, которые ранее (в средней школе) решались синтетическими, часто искусственными и сложными методами.

 Удовлетворение, полученное от проявлений первого и второго признаков научного прекрасного Хатчесона, оказывает существенное мотивационное влияние на отношение к математической деятельности. Признаки научного прекрасного единства многообразий и всеобщности широко проявляются в аксиоматическом методе построения теорий. Системой аксиом векторного пространства, например, объединяется то, что является общим для прямой – одномерной структуры, плоскости – двумерной структуры, пространства – трехмерной структуры, как и вообще – любого примера векторного пространства (заданного над фиксированным полем). На основе этой системы развивается одна из важнейших теорий, лежащих в основе современной математики. Здесь проявляется признак научного прекрасного – единства многообразий, что является несомненным фактором эстетической привлекательности теории векторных пространств. Далее, результаты, полученные в этой общей теории, применяются для конкретных примеров векторных пространств. Это уже проявление всеобщности – второго признака научного прекрасного Хатчесона. Его эстетическая привлекательность очевидна, так как математический факт устанавливается не для каждого отдельного примера векторных пространств (что было бы очень трудоемко и тоскливо), а проистекает из общих соображений о фактах векторного пространства. Подобные заключения можно сделать относительно любой алгебраической системы и не без оснований считать, что изящество современной математики, в частности – алгебры, во многом обусловлено именно первым и вторым признаками научного прекрасного Хатчесона.

 Признаки единства многообразий и всеобщности широко проявляются и в школьном курсе математики. Рассмотрим ситуацию из опыта моего учителя математики. Мой школьный учитель, уважаемый Анушаван, обладал особенным преподавательским даром. Однажды, зайдя в класс, он провел на доске две параллельные линии, на нижней из них отметил отрезок, а на верхней взял две точки и соединил их с концами отрезка – получилось два треугольника. «Какой из них обладает большей площадью?» – спросил уважаемый Анушаван. Не получив нужного ответа от нас, уважаемый Анушаван вытер доску и объявил тему нового урока: «Формула площади треугольника». После объяснения урока он опять вытер доску, выделил формулу S = 0,5ah площади треугольника на ее крае, снова провел те же параллельные линии с отрезком, точками и треугольниками и повторил свой вопрос. Кажущееся невозможным сравнение становилось очевидным, благодаря простой математической формуле. Читая уже в наших глазах решение поставленной задачи, наш учитель вдохновенно сказал: «Вот сила математики». Потом он положил мел на край доски, вытер руки и вышел из класса, хотя звонка еще не было. А мы на этот раз не выбежали из класса, как обычно делали после ухода учителя. Конечно, проявление силы математики было очевидно, но нам показалось еще что-то – выше этой силы – что-то притягивающее, привлекательное, и это, видимо, было связано с двумя признаками научного прекрасного Хатчесона.

 А вот и пример из моего опыта. Много лет назад в созданной мною частной школе я преподавал алгебру и параллельно с ознакомлением с языком алгебры проводил его сравнение с арифметическим языком, чтобы показать его возможности. Это позволило учащимся лучше понять возможности алгебры, вызвало интерес к ней. После введения понятия неизвестного в теме «Азбука алгебры», я обычно задавал такой вопрос: «Как вы думаете, сколько денег у меня?» Так как учащиеся уже были знакомы с понятием неизвестного, то нужный мне ответ вроде «У Вас x рублей» я получал. На вопрос же «Сколько денег у вас?» ответы были разными, но с конкретными числами. Здесь я проводил первую параллель между алгеброй и арифметикой: то, что мы знаем, сколько денег у нас, – это арифметика, а то, что мы знаем, сколько денег у других, – это уже алгебра. Преимущество алгебры здесь кажется очевидным, но оно имеет некоторый виртуальный характер, и приведенное сравнение не производит особенного впечатления на учеников.

Следующее сравнение алгебры и арифметики продолжалось при изучении сложения (и других операций) в курсе алгебры. В его основу был положен тезис, что арифметика позволяет найти сумму известных величин, а алгебре дает возможность найти сумму неизвестных величин. Например, если у одного ученика x рублей, у другого – y рублей, то у них вместе будет x + y рублей. Интерес к этому новому сравнению как будто немного возрастает, тем не менее, скептицизм остается, так как в алгебраической операции сложения непосредственной пользы не усматривается. Тогда я попытался убедить учеников в том, что сложение, как и другие алгебраические операции с неизвестными, – не фокус и не магия, а действия, направленные на познание истины и решение повседневных задач, в чем мы неоднократно убедимся впоследствии. Для окончательного убеждения учащихся я приводил одну из развлекательных задач прекрасного армянского математика VII века Ананиа Ширакаци. Для этой цели хороши первые три его развлекательные задачи – храхчанакани (А. Ширакаци, 1979). Вот третий храхчанакан Ширакаци: «Скажи другу твоему, что я могу узнать, сколько денег у него в кошельке. Если он скажет «попробуй», ты скажи ему: возьми количество своих денег, добавь столько же, удвой его, добавь еще раз заданное число и полученную сумму опять удвой. Когда он закончит свои вычисления и сообщит тебе результат, раздели его на десять. Полученное число и будет количеством денег в его кошельке». Если обозначим сумму в кошельке через x, то условие задачи приведет к вычислению выражения 2(2(x + x) + x):10. Но очевидно, что это выражение равно x, т.е. Ширакаци в скрытой форме требовал другу сообщать именно число x. В этом случае учащиеся уже чувствуют силу и очарование алгебры, что опять связано с признаками научного прекрасного Хатчесона.

**Математическая формулировка научной закономерности**

Согласно этому принципу эстетики математики, приведенной Владимиром Волькенштейном, любая четкая и гармоническая формулировка научной истины на языке математики приносит эстетическое впечатление (В. М. Волькенштейн, 1931).

Общеизвестна роль математики и математического языка в процессе формулировки закономерностей физики. Впечатления от математической формулировки законов механики, например, были настолько велики, что Ньютон рассматривал их как доказательство существования Бога. Есть много биологических закономерностей, которые описываются или представляются при помощи математических формул. Рассмотрение таких закономерностей на уроках математики имеет не только познавательное значение, но и придает эстетическую окраску изучаемому материалу. Привлечение же соответствующих материалов в учебниках делает их привлекательным для учащихся. Приведем примеры из учебника (Г.С. Микаелян, 1999, 2006)

1. В англоязычных странах температуру воздуха измеряют по фаренгейтам. Связь шкал Фаренгейта (F) и Цельсия (С) выражается формулой F = 1,8C + 32, и приводятся задачи, где неизвестными являются F или C.

2. Знаете ли Вы, что температуру воздуха можно определить, слушая крикет? Если обозначать через n число скрипов, выпущенных крикетом за одну минуту, то температуру воздуха по фаренгейтам можно определить по формуле F = 0,25n + 37. Далее приводятся задачи, где неизвестными являются F, n или C.

3. Вес нормального мужчины в килограммах можно определить по формуле m = 0,9h – 90, где h – его рост в сантиметрах. Далее приводятся задачи, где неизвестными являются m или h.

Некоторые учителя исходят из значимости этого признака, когда важные формулы берут в рамки. В этот ряд нужно включить также моделирование текстовых задач. Однако здесь намечается некоторая переоценка значения математической записи: учащиеся (часто и учитель), создавая математическую модель текстовой задачи, записывают соответствующее уравнение или неравенство, решают его и на этом считают дело сделанным и не обращают внимания на анализ самой задачи. Не следует думать, что это делается из эстетических соображений (имея ввиду эстетику математической записи задачи). Просто в подобных случаях учащего интересует только ответ задачи и исполнение поручения учителя, что далеко от эстетических мотивов.

**Применимость**

С древних времен люди понимали незаменимую роль вычислений и измерений при организации повседневной жизни. И параллельно с улучшением жизни, развитием цивилизаций возрастала роль математики, ее прикладное значение в самих различных сферах жизнедеятельности человека. Математика постепенно становилась одним из главных факторов общественного развития, его ведущей силой. Но чем обусловлено подобное практическое значение отрасли науки, имеющей абстрактный характер по форме и виртуальной по содержанию?

Конечно, речь не о старинных методах подсчетов и измерений, хотя эти процедуры сохраняют свою актуальность и сегодня. Речь в первую очередь идет о взаимосвязях математики с природой. Как отмечает великий Галилей, «Книга природы написана на языке математики» и для чтения этой книги нужно знать язык математики. Без знания языка математики никакая наука, направленная на исследование природы, не может достичь существенных успехов. Поэтому и математика получила беспрецедентное применение в исследованиях природы и в некоторых отраслях науки. Благодаря математике возрастает надежность полученных результатов, вес истины в проведенных исследованиях, т.е. математика привносит в любую область науки познание и истину. Применение математики в физике, химии, экономике и других естественных и некоторых гуманитарных науках подтверждают сказанное. Более того, эти науки в своих современных формах обязаны математике. Но разве только природа является объектом исследования математики? А искусство? Разве оно не является формой познания природы и не требует обращения к математическому языку в этой области познания? И, действительно, математика имеет широкое применение в таких областях искусства, как архитектура, изобразительное искусство, музыка. В архитектуре применение математики становится возможным благодаря симметрии и пропорции. Важными элементами изобразительного искусства являются перспектива, параллельное проектирование, аксонометрия – чисто геометрические понятия, позволяющие применять математику при создании произведений. Применение математики в музыке обеспечивается использованием пропорций. Математика может находить применение в литературе, театре, кино, танцах и во многих других областях искусства, вводя там “порядок и закон”.

Математика имеет широкое применение в технике. При помощи одной из «жемчужин» геометрии – теоремы Пифагора, например, можно получить ответ на один из важнейших вопросов, поставленных природой перед человеком. В организации жизнедеятельности человека важную роль играет построение прямого угла. В самом деле, без этого знания невозможно осуществлять постройку не только больших архитектурных сооружений, но и любых сооружений вообще. Можно смело считать, что прямой угол – основа строительства. Поэтому отвес – инструмент, позволяющий проверить перпендикулярность стены строительства, – является самым необходимым инструментом каменщика. Но та же задача решается и теоремой Пифагора (вернее – обратной ей): если квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то такой треугольник прямоугольный. Строители часто у себя держат треугольник с размерами сторон 3, 4, 5 и, используя обратную теорему Пифагора, проверяют с его помощью прямоту углов. Часто такие треугольники изготавливаются с помощью веревок, что делает более удобным их использование.

Следует отметить, что пифагоровы треугольники позволяют построить прямые углы на горизонтальной (и, вообще говоря, на любой) плоскости, чего нельзя сказать об отвесе. Ясно, что как признак Волькенштейна, так и признак применимости математики можно рассматривать как частные случаи принципов единства многообразий и всеобщности Хатчесона. В самом деле, любая запись законов природы или прикладной задачи на математическом языке является выражением единства в многообразии, а в разнообразиях применений такой математической записи проявляется всеобщность научной истины. Например, если сумма а депозита каждый год в банке увеличивается на p%, то через n лет она станет равной 𝑎(1 + 𝑝/100 )𝑛 и эта закономерность является выражением единства в многообразии, а ее применение для конкретных значений параметров a, p, n – проявлением всеобщности научной истины. В обоих случаях мы имеем дело с научной красотой.

Эстетический принцип применимости можно успешно использовать в процессе обучения математике. Выше я рассказывал об одном моем школьном учителе. Другой мой школьный учитель, уважаемый Ваграм, перед началом изучения теоремы Пифагора привел нас на прямоугольный школьный участок, предложил двум ученикам, начиная с угла участка, начать двигаться по его сторонам и измерять пройденный путь. Сам же, с загадочной улыбкой на лице, сообщал расстояние между учениками после каждого такого измерения и никогда не ошибался. Конечно, мы были удивлены, а уважаемый Ваграм затем проводил нас в класс и после объявления о том, что сейчас он раскроет секреты своего «волшебства», на доске писал тему нашего урока: «Теорема Пифагора» и раскрыл тайну самой прекрасной геометрической сокровищницы. Конечно, мои уважаемые учителя ничего не знали об Хатчесоне и, возможно, об эстетике математики вообще. Но они интуитивно чувствовали наличие эстетического в математике и умело использовали эти элементы в процесс преподавания.

**Логические признаки научной эстетики в**

**обучении математике**

Логические признаки научного прекрасного особенно ярко выражают свою эстетическую привлекательность в математике и логике. Здесь мы рассмотрим следующие логические признаки: логическую строгость, четкость, простоту, сведение сложного к простому.

**Логическая строгость**

Обычно математические рассуждения строятся по законам и правилам логики, что придает изложению этих рассуждений логическую строгость. Логическая строгость, в свою очередь, обеспечивает математическому знанию надежность, помогает избежать заблуждений, позволяет отыскивать пути, ведущие к истине. В то же время математика придает логическую строгость и исследованиям во всех тех науках, где она используется. В научном мире даже существует точка зрения, что научные результаты, полученные без использования математики, не могут считаться надежными. Указанные выше причины делают математическое знание желательным и полезным, придавая ему бóльшую прикладную и эстетическую привлекательность. Логическая строгость свойственна математике и относится ко всем математическим объектам: понятиям, формулировкам теорем и задач, а также их доказательствам и решениям задач (Г. С. Микаелян, 2015. с. 366–404).

В отличие от собственно математики, в ее школьном обучении признак логической строгости должен соответствовать дидактическим принципам, которые требуют учитывать возрастные особенности учащихся, их способности в восприятии математического материала, имеющиеся знания и т.д. Признак логической строгости по вполне понятным причинам весьма слабо выражен в начальной школе, но усиливает свое влияние на следующих образовательных степенях.

Следует отметить, что логическая строгость по-разному реализуется при изучении материала отдельных тем. При изложении теоретического материала она выражается более полно, однако там, где речь идет о практическом применении, логическая строгость выражается слабо. На начальном этапе обучения математике признак логической строгости формирует у учащегося осознание возможности ошибаться или не ошибаться при конструировании суждений, определяет основы безошибочных суждений. На этом этапе математика становится для учащегося мерой выражения истины. В средней школе учащийся знакомится с некоторыми способами дедуктивных умозаключений. Здесь главную роль играет доказательство – «искусство математики», которым обладает курс геометрии, где доказательство впервые выступает в качестве способа подтверждения истины, а процесс вывода из фактов, методы его реализации проявляются с большой интенсивностью. Следует отметить, что при соответствующем изложении учебного материала похожие возможности открываются также и в курсе алгебры, что повышает ее эстетическую привлекательность в обучении [87–89]. Эстетический признак логической строгости обретает широкие возможности в выражении в курсе алгебры средней школы при включении в него элементов логики. В этом случае четкие определения истинностных значений суждений, а также суждений, полученных посредством логических связок, наличие других элементов логики создают крепкую основу для обоснованных, аргументированных умозаключений (подробнее см. в цитиуемих работах автора)/

Потенциал математики в формировании прекрасного посредством признака логической строгости получает особую силу, качество и эстетическую привлекательность в процессе построения умозаключений в старшей школе. Здесь, в доказательствах с помощью математической индукции, аналогии и других методов, логическая строгость обретает новые оттенки и сочетается с эстетическими признаками единства разнообразий и всеобщности. Действительно, если формулы общих членов, либо сумм арифметической и геометрической прогрессий в средней школе «доказываются» (выводятся) посредством индуктивных рассуждений, то в старшей школе эти и подобные формулы обосновываются уже с использованием метода математической индукции.

**Четкость.**

Четкость мысли, ее вразумительное изложение являются необходимым условием как для ее восприятия, так и для эстетической привлекательности. Без четкости даже самая пленительная история теряет свою привлекательность. Нечеткое изложение материала может сделать его непонятным. Результаты научных исследований ученого обычно представляются и излагаются не таким образом и не в таком порядке, как они были получены. Здесь требуется мастерство изложения, что, в первую очередь, обусловлено четкостью. Великие мыслители, как правило, способны четко излагать не только полученные ими результаты, но и соответствующие области науки. Одним из главных условий успеха является четкость изложения.

Требуемая в математике четкость – это, в первую очередь, однозначные, ограждающие от неопределенности и порочных кругов определения понятий; это четкое представление их содержания, рассмотрение родовой и видовой принадлежности, их объема и примеров вне этого объема; четкое формулирование суждений и однозначность определения их истинностных значений; возможность однозначного восприятия умозаключений, теорем; аргументированность доказательств и т.д. Выполнение всех этих требований придает изложению математического материала эстетическую привлекательность Эстетический признак четкости особенно важен в процессе обучения, где формируется и получает дальнейшее развитие человеческое мышление. Каким оно станет в будущем, обретет ли человек свое самое большое богатство – культуру четкой, аргументированной речи – зависит от процесса обучения. И в процессе формирования этой культуры так же, как и одного из важных ее компонентов – четкости, первостепенное значение имеет процесс обучения математике.

Математическая деятельность формирует уникальную, идеальную меру четкости, соответствие которой если не обязательно, то желательно для успешной деятельности в научной, политической, правовой и других областях. Из-за несоответствия данному критерию часто бывает сложно понять, например, смысл различных суждений, продуцируемых в гуманитарных областях знаний либо на политической арене. Использование логического инструментария имеет большое значение для четкого изложения школьного курса математики. Без знания элементов логики сложно достичь четкого, аргументированного изложения математического материала так же, как без знания правил грамматики правильно строить предложения и суждения на родном языке. К примеру, попробуйте без знания этих элементов выяснить, истинна ли формула 2 ≤ 2, или формула 1 = ±1. Опыт показывает, что большинство учителей, по сути, не понимает смысла (значения) знака ≤, хотя этот вопрос проясняется при обращении к понятию логической суммы. Действительно, формула 2 ≤ 2 является логической суммой «2 < 2 или 2 = 2» формул 2 < 2 и 2 = 2, которая истинна лишь в том случае, когда истинна хотя бы одна из ее частей. В данном случае в утверждении «2 < 2 или 2 = 2» истинным будет равенство 2 = 2, из чего следует, что истинной будет также формула «2 < 2 или 2 = 2» или же ее сокращенная запись 2 ≤ 2. Таким же образом формула 1 = ±1 представляется в виде логической суммы «1 = 1 или 1 = –1» формул 1 = 1 и 1 = –1, которая будет истинной, поскольку истинной является ее первая компонента – равенство 1 = 1.

Приведем еще один пример. Для конструирования отрицания суждения «Айк является отличником» можно поставить логическую связку «не» перед глаголом «является». В результате мы получаем требуемое отрицание: «Айк не является отличником». Попробуем теперь сконструировать отрицание суждения «Все ученики класса являются отличниками». Куда можно поставить связку «не» в этом случае? Будет ли получено искомое отрицание, если подобно предыдущему случаю и здесь поставить связку «не» перед глаголом «являются», т.е. «Все ученики класса не являются отличниками»? Конечно нет! А решение вопроса вновь кроется в обучении элементам логики.

Таким же образом формула 1 = ±1 представляется в виде логической суммы “1 = 1 или 1 = –1” формул 1 = 1 и 1 = –1, которая будет истинной, поскольку истинной является ее первая компонента – равенство 1 = 1. Приведем еще один пример. Для конструирования отрицания суждения “Айк является отличником” можно поставить логическую связку “не” перед глаголом «является». В результате мы получаем требуемое отрицание: «Айк не является отличником”. Попробуем теперь сконструировать отрицание суждения “Все ученики класса являются отличниками". Куда можно поставить связку “не” в этом случае? Будет ли получено искомое отрицание, если подобно предыдущему случаю и здесь поставить связку “не” перед глаголом «являются», т.е. “Все ученики класса не являются отличниками”? Конечно нет! А решение вопроса вновь кроется в обучении элементам логики. Вопрос о взаимоотношениях естественного языка с математическим языком подробно рассмотрен в работе (Г.С. Микаелян, 2003). Здесь отметим, например, что представление математического отношения ≤ в виде «не больше» вносит в процесс обучения четкость. Попытка замены этого отношения на «не дошел», «не длинный», «не дорогой» и другие подобные выражения, характерные для практической сферы, дополняет процесс усвоения данного понятия. При этом одновременно иллюстрируется разнообразие и богатство языковых видов, а также необходимость обеспечения однозначности и четкости в математическом языке посредством единства многообразий.

Таким же образом знак «<», в зависимости от величины измерения измеряемого объекта, в природном языке интерпретируется с помощью терминов «короче», «уже»,«мельче», легче» и других, а сложение – «прибавить», «объединить», «углубить», «смешать», «удлинить» и другими понятиями, вычитание – «отнимать», «укорачивать», «замедлять» и другими понятиями – опять же, в зависимости от сущности «измеряемого объекта». И здесь процессу обучения придает дополнительную эстетическую привлекательность единство разнообразных языковых выражений, характеризующих отмеченные математические объекты. Наблюдаемые же отношения с естественным языком способствуют не только внесению четкости в математический язык, всестороннему охвату материала, но и процессу овладения родным языком.

Как в математике, так и в ее школьном курсе четкость в первую очередь требует однозначных определений исследуемых понятий. Это не только выражение эстетического признака четкости, но и основа эстетики математики, ее школьного курса и математического языка: без четкого и однозначного понимания сущности понятий математики не существует. Эстетическая привлекательность четкости ярко выражается также и в математических теоремах. Здесь четкость в первую очередь означает формулировку необходимых условий или же предпосылок, а также их доступное представление учащимся. Очень важно, чтобы учащийся понимал роль каждого условия теоремы в процессе ее доказательства и получении заключения. С технической точки зрения обычно понимание сущности (процесса) доказательства теоремы более сложно, что обуславливает использование логических инструментов, обеспечивающих четкость – доказательство должно производиться с помощью однозначно определенных, последовательных шагов, каждый из которых представляет собой истинное суждение или умозаключение, что в совокупности ведет к заключению теоремы.

 «Для придания большей ясности признаку четкости в процессе математических рассуждений необходимо обеспечивать сопровождение обучения математического материала суждениями из повседневной жизни либо гуманитарной области, которые, в силу своей неопределенности, не воспринимаются однозначно и приводят к различным толкованиям. То же касается и задач: если их условия не являются достаточными для решения или же они нечеткие, то они не воспринимаются однозначно, а, следовательно, не может быть получено и решение.

Следует отметить, что эстетический признак четкости выражается параллельно с восприятием, пониманием. Без понимания излагаемого содержания не может быть четкости и эстетической привлекательности. Отсутствие понимания и механическое воспроизводство содержания, являющееся следствием отсутствия четкости, не только не способствует выражению его эстетической привлекательности, но и приводит к отрицательной эстетической реакции, отталкивает учащегося от учебного предмета и от математики в целом.

При воспроизведении каких-либо фактов учащимся либо при диагностировании усвоения им понятий и способов действий часто наблюдается отрицательный эффект: приученный к стандартным ответам учащийся не только легко забывает воспроизведенное, как и впоследствии (в жизни или же в профессиональной деятельности) привыкает к необдуманным, поверхностным действиям без проникновения в глубь явлений. Поэтому учитель обязан не выуживать из учащегося ответ, исправляя одно-два слова, а объяснять суть материала, исходя из эстетического признака четкости, исправлять ошибки, если они были допущены.

**Простота.**

Еще древнеримский поэт Гораций считал простоту эстетическим признаком искусства. Что касается математики, то известна точка зрения, что математическая деятельность является сложной и, следовательно, далекой, от эстетического признака простоты. Но именно простота или же эстетический признак простоты являлись одной из главных движущих сил, которая наряду с эстетическим признаком четкости обеспечила беспрецедентное развитие математики. Действительно, для однозначного, избавленного от неопределенностей представления суждений в математике действует принцип четкости, который обычно реализуется посредством большого количества символов. И большое количество символов часто препятствует восприятию сути математического материала, однако посредством специальных приемов математика, приходит к определенным упрощениям. Рассмотрим, например, записи одного и того же выражения в виде 2+3·4–6:3 и (2+(3·4))–(6:3) и попробуем выяснить, который из них более эстетичен и какой смысл имеет его «эстетика». Первое из выражений не отличается каким-либо эстетическим признаком, в то время как во втором выражении есть три пары скобок, расположенных симметрично, что придает выражению определенную внешнюю привлекательность. Однако каждый, занимающийся математической деятельностью, предпочтет иметь дело не со вторым, а с первым выражением. Почему? Дело в том, что основная цель любой математической записи не обеспечивать внешний эффект, а реализовывать процедурную (или иную) сущность этой записи, в данном случае – выполнение действий. Потому запись будет восприниматься как хорошая, предпочтительная и эстетичная в том случае, если она упрощает процесс, «за ней стоящий». Первое из выражений является упрощенной записью второго, полученным освобождением выражения от скобок и применения правил, определяющих порядок выполнения действий. Если мы не будем применять такие правила, то обилие скобок в выражениях или формулах, диктуемое требованием признака четкости, будет препятствовать восприятию математической сущности выражения или формулы, усложнит совершаемые действия. Соответственно, упрощение ведет к облегчению восприятия и действий, а внешний вид «объекта» делает его эстетически привлекательным.

Вся история математики – это история поиска символов, записи, уточнения и упрощения с их помощью математических выражений и формул. Достаточно проследить за процессом развития математического языка, сравнить различные виды представления одних и тех же математических объектов на различных этапах их существования, чтобы стало видно их внешнее эстетическое развитие. Попробуйте прочесть работы математиков прошлого. В них изложение даже простых фактов замысловато и трудно понимается, иногда читателю требуется мастерство дешифратора. Причина – язык их представления. Математический язык достиг своего сегодняшнего совершенства в результате многовековой работы величайших математиков, а главная стимулирующая сила и эстетическая привлекательность полученных результатов обусловлены их четкостью и простотой. Смело можно утверждать, что без этого эстетического прогресса не был бы возможен и прогресс математики. Достаточно, например, сравнить числа и производящиеся с ними действия, когда они представлялись в римской и арабско-индийской или позиционной записи.

Действительно, попробуйте умножить друг на друга два числа, записанные в римской нумерации, или же, что еще сложней, выполнить деление одного из них на другое. Последний процесс настолько сложен, что в средние века существовала отдельная математическая профессия для выполнения действия деления. Другой пример встречается в средневековой Армении, где одной из серьезных услуг величайшего математика Анания Ширакаци было составление таблицы действий с натуральными числами. А сегодня, благодаря позиционной записи чисел и соответствующим процедурам, отмеченные действия не представляют сложности даже для учеников начальной школы.

**Сведение сложного к простому**

Ясность, простота, ее наличие делает процесс эстетичным, а сложное часто становится непонятным, следовательно, неэстетичным. Поэтому сведение сложного к простому, упрощение следует считать процессом формирования эстетичности, ее признаком. Естественно, совершение открытия в какой-либо области математики требует от математика последовательности, выражения волевых качеств. Не менее сложным является и ознакомление со сделанными открытиями. Оно требует не только необходимого напряжения для понимания идей исследователя, но и огромного запаса знаний. И поэтому не удивительно, что работающие в различных областях математики уже давно с трудом или же совершенно не понимают друг друга. Для урегулирования этого процесса математики предпринимают последовательные шаги в сторону упрощения математического языка. В то же время сама математика, математическое открытие в большинстве случаев совершается посредством редукции сложного к простому, а суть математической деятельности сводится к упрощенному описанию свойств и отношений математических объектов. Великолепным примером выражения признака математической эстетики – сведения сложного к простому – является измерение площадей плоских фигур (а также длин частей кривых, объемов тел). Данный процесс мы начинаем с простейшей фигуры – квадрата, принимая один из них за единицу измерения. Далее, переходя к более сложной фигуре – прямоугольнику, показываем, что площадь прямоугольника равна произведению двух его сторон. Формулу вычисления площади прямоугольника в дальнейшем используем для вычисления площади треугольника и т.д.

Подобным образом организованный «вычислительный процесс» сведения сложного к простому, как и его результат, имеющий вполне определенную практическую значимость, был известен еще в Древнем Египте, Месопотамии, Античной Греции. Последовательность действий в нем довольно проста, легко воспринимается и, следовательно, эстетическая привлекательность процесса не велика. Однако площадь круга вычислить таким же способом оказывается невозможно. Для получения необходимого результата процесс вычислений требует некоего революционного шага, неожиданности, а также иных признаков «математической эстетики» и, естественно, гениальности в реализации этого процесса, которая была дана ученику Платона Евдоксу Книдскому В предложенном методе исчерпывания Евдокс обосновывает не только способ вычисления площади круга, но и, по сути, закладывает первоосновы идеи предела. При этом правильная математическая формулировка полученных результатов стала возможной лишь через две тысячи лет после Евдокса, когда европейская математическая мыль силами Исаака Ньютона, Готфрида Лейбница и других математиков придала математическому языку современный вид. На этом языке площадь круга представляется как предел последовательности площадей вписанного в нее правильного n-угольника, где n стремится к бесконечности. Впоследствии, с появлением идеи интеграла, стало возможным вычисление площадей более сложных фигур.

Подобный пример сведения сложного к простому является замечательным свидетельством стремления к выработке математического метода с очевидной эстетической привлекательностью. При обучении математике этот эстетический признак в первую очередь проявляется в процессе усвоения понятий. Рассмотрение примера и контрпримера для любого понятия уже является сведением сложного к простому. Именно поэтому рекомендуется сопровождать введение каждого понятия рассмотрением примеров, относящихся к его объему, причем до введения самого понятия. В основном подобным образом определяются понятия через род и видовые отличия.

Эстетический признак сведения сложного к простому проявляется также и в применении определений. Например, обоснование необходимости введения и изучения основополагающего в математике понятия числа, его усвоение – чрезвычайно сложно реализуемые процессы, которые становятся более понятными и реализуемыми в первую очередь благодаря практическому использованию чисел. Сказанное относится не только к введению натуральных чисел как инструмента счета предметов и нумерации в начальной школе, но и к более сложным практическим применениям идеи числа в старших классах.

Сведение сложного к простому как эстетический признак широко используется в математических теоремах и их доказательствах. Применение любой математической теоремы уже само представляет собой сведение сложного к простому. Например, как найти объем такого тела, как конус? С первого взгляда соответствующий процесс является сложным, однако с помощью определенных математических приемов он сводится к простой формуле 𝑉 = 1/3 𝜋𝑅 3. И эстетичность здесь проявляется не только в простом виде данной формулы, но и в возможностях ее использования.

Великолепным примером сведения сложного к простому является вычисление площади треугольника на уроке геометрии. Известно, что для получения площади прямоугольника выбирается единица измерения – квадрат. С помощью последовательных шагов (дробления квадрата на более мелкие квадраты и «замощения» ими прямоугольника), т.е. сведения сложного к простому, определяется площадь прямоугольника как произведение его двух сторон. А как поступить в случае с треугольником? На первый взгляд решения задачи кажется невозможным, так как треугольник никаким образом невозможно «замостить» квадратами, как бы мы их не уменьшали.

Однако мы можем сделать неожиданный шаг: не квадрат или прямоугольник вписываем в треугольник, а треугольник «вписываем» в прямоугольник, как показано на рисунке 3. Очевидно, этот неожиданный и непредсказуемый шаг (наличие соответствующих эстетических признаков) значительно повышает эстетическую привлекательность решения задачи.На чертеже видно, что треугольник α равен треугольнику β, а γ=δ. Но данный треугольник равен объединению треугольников α и β, а прямоугольник – объединению треугольников α, β, γ и δ. Следовательно, площадь треугольника будет равна половине площади прямоугольника. С другой стороны площадь прямоугольника равна произведению его двух сторон. Одна из сторон является основанием треугольника, а вторая равна высоте треугольника. Откуда следует, что площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту. Таким образом, доказательство последнего суждения сведено к цепочке достаточно легких суждений, то есть от сложного к простому. Если же кому-то предложенные суждения покажутся сложными, можно прибегнуть к дальнейшим упрощениям.

Эстетический признак сведения сложного к простому в методике преподавания, учебниках, мастерстве учителя должен ориентироваться на поиск путей реализации важной педагогической и социокультурной задачи повышения эстетической привлекательности изучаемого материала как и урока в целом.

**Упражнения yа gризнаки mатематического gрекрасного**

**Из учебника Г. C. Микаелян, Алгебра 8, «Эдит принт», 2024**

101. (Обсуждение): И в жизни, и в математике мы узнаем о многих истинах. Знание истины — это хорошо или плохо? a. в жизни, b. в математике.

102. Выберите любое суждение, рассмотренное в теме, «Операции с действительными числами», которое является для вас неочевидной истиной. Каким прилагательным вы бы охарактеризовали знание этого суждения?

a) интересное, b) полезное, c) привлекательное, d) красивое.

103. Красивым принято считать знание неочевидной математической истины. Различайте неочевидные истины действительных чисел.

a. в законах сложения, b. в законах умножения, c. в свойствах сложения и умножения..

194. Приведите пример неочевидной истины в свойствах, рассматриваемых в параграфе «Рациональные выражения и рациональные дроби», знание которой вам понравилось.

346. Учитывая, что сведение сложного к простому является признаком красоты, можно ли считать красивыми:

a. приемы решения неравенств,

b. шаги, предпринимаемые при решении неравенств.

375. Укажите факты, представленные в теме «системы неравенств», которые вы можете считать привлекательными, поскольку они удовлетворяют следующему признаку математической красоты:

a. знание неочевидной истины,

b. сведение сложного к простому.

510. Расположите следующие свойства квадратного трехчлена в порядке их неочевидной истинности:

a. выделение полного квадрата, b. формулы для корней,

c. прямая теорема Виета, d. обратная теорема Виета

e. разложение на линейные множители, f. не имеет более двух корней

604. Как сложное сводится к простому в свойствах 1-3?

726. Покажите, что метод решения неравенств интервалами использует эстетический признак сведения сложного к простому.

727. Укажите в теме «Неравенства, содержащие модуль»:

a. очевидная истина, b. неочевидная истина

750. a. Какую часть равенства $\sqrt{x^{2}}=|x|$ вы считаете простой, а какую - сложной?

b. Как в этом равенстве проявляется математическая красота сведения сложного к простому?

780.Как проявляется признак математической красоты сведения сложного к простому в следующей эквивалентности:

a. если c < 0, то $\sqrt{ax+b}>c$ ⇔ ax + b≥ 0,

b. если c > 0, то $\sqrt{ax+b}>c$ ⇔ ax + b > c2.

**Из учебника Г. C. Микаелян, Алгебра 9, «Арег», 2025.**

33. Математический объект - понятие, теорема, свойство, доказательство, задача, решение задачи считается красивым, если он наделен определенным признаком. Такие признаками красоты были впервые предложены шотландским философом Фрэнсисом

Хатчесоном в 18 веке. Хатчесон предложил три таких признаки,

первым из которых является единство многообразий.

1. Можете ли вы привести пример единства многообразий, которое доставило вам удовольствие?
2. Является ли единство многообразий в математике прекрасным и доставляет удовольствие человеку?

34. Какое единство многообразий выражает следующее понятие?

a. ученик, b. мальчик, c. мать, d. солдат, e. 1, f. 5, e. x, h. x – y:

35. Какой вид единства многообразий выражает свойство?

a. армия состоит из полков,

b. в школе двенадцать классов,

c. x + 0 = 0,

d. x + (–x) = 0,

e. x – y = x + (–y),

f. x : y = x · 1/y:

36. Попробуйте понять, почему Хатчесон принял единство многообразий как характеристику эстетической привлекательности математических объектов. QR:

37. (Обсуждение). Единство многообразий хорошо или плохо?

a. в жизни, b. в армянском языке, c. в математике.

82. Следующим эстетическим признаком математических объектов, предложенной Фрэнсисом Хатчесоном, является универсальность.

a. Объясните универсальность математических объектов на примере.

b. Вам нравится универсальность математических объектов,

c. Универсальность математического объекта доставляет удовольствие?

83. Определите универсальность следующих утверждений:

a. Ученик должен быть добросовестным,

b. Старших нужно уважать,

c. Родину нужно любить,

d. Золотое правило нравственного поведения: поступай с другими так, как ты хотел бы, чтобы они поступали с тобой,

e. Золотое правило нравственного поведения: не поступай с другими так, как ты не хотел бы, чтобы они поступали с тобой,

f. Вы следуете золотому правилу нравственного поведения?

84. Определите универсальность следующих утверждений:

a. 1 < 2,

b. x + 0 = x для любого числа x,

c. (a + b)2= a2+ b2+ 2ab,

d. Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину.

85. (Обсуждение). универсальность — это хорошо или плохо?

а) в жизни, б) в армянском языке, в) в математике.

105. Что сложное, а что простое, когда мы определяем:

a. y = f(x + a) через y = f(x), b. y = f(x) + a через y = f(x),

c. y = f(-x) через y = f(x), d. y = –f(x) через y = f(x),

e. y =-f(-x) через y = f(x), f. y = af(x) через y = f(x).

106. Последный признак красоты математических объектов, предложенное Хатчесоном, — это знание неочевидной истины: знание неочевидной истины о математических объектах прекрасно и доставляет человеку удовольствие и радость.

a. На каждом уроке алгебры вы сталкиваетесь со многими неочевидными истинами. Вам это нравится? Можете ли вы привести соответствующие примеры?

107. (Обсуждение). Хорошо или плохо знать неочевидную истину?

a. в жизни, b. в армянском языке, c. в математике, d. в спорте.

108. 1). Назовите утверждение, рассмотренное в параграфе “Преобразования графика числовой функции”, которое является для вас неочевидной истиной.

2). Каким прилагательным вы бы описали знание этого утверждения?

a. интересное, b. полезное, c. привлекательное, d. Красивое.

109. Является ли утверждение неочевидной истиной?

a. 1 = 1,

b. если a = b, b = c, то a = c для произвольных чисел a, b, c,

c. наибольшая сторона треугольника лежит напротив наибольшего угла,

d. равные алгебраические выражения также тождественно равно равны,

e. тождественно равные алгебраические выражения также равны.

f. количество простых чисел бесконечно,

e. количество простых однозначных чисел равно 4,

h. уравнение x2+ y2= z2 имеет решение,

t. Великая теорема Ферма։ уравнение xn+yn=zn не имеет решения при натуральном n > 2.

133. Как бы вы интерпретировали единство многообразий в пунктах a – e Свойство 2?

167. Являются ли формулы для сложных процентов неочевидными истинами?

203. Является ли теорема Безу неочевидной истиной?

204. Как вы понимаете универсальность теоремы Безуи?

238. Очевидная это или не очевидная истина?

а. Эквивалентность утверждений о том, что многочлен f(x) имеет корень a, и он делится на двучлен x – a без остатка.

б. Если многочлен f(x) имеет различные корни a1, a2, ..., an, то

он будет делиться на произведение (x – a1)(x – a2)...(x – an).

в. Количество корней ненулевого многочлена не может превышать его

степени.

г. Равенство многочленов от одной переменной является тождеством,

д. Тождество многочленов от одной переменной является равенством.

274. Покажите, что эстетический признак сведения сложного к простому используется при решении рациональных уравнений.

275. Укажите очевидные и неочевидные истины, с которыми вы столкнулись в параграфе «Рациональные уравнения». С какой из них было приятнее всего познакомиться или узнать?

304. (Задача Софи Жермен). Докажите, что если a - натуральное число, большее единицы, то число a4 + 4 является составным.

Решение: a4 + 4 = a4 + 4a2 + 4 – 4a2 = (a2 + 2)2 – 4a2 = (a2 + 2 - 2a)(a2 + 2 + 2a).

И если a больше 1, то множители полученного произведения отличны от 1.

a. Является ли эта задача Софи Жермен неочевидной?

b. Является ли решение этой задачи Софи Жермен неочевидным?

c. Вам нравится или кажется ли вам эта задача или ее решение красивыми?

305. В чем универсальность приема подстановки переменных?

306. Объясните признак единства многообразий на примере решения квадратных уравнений.

384. Как бы вы интерпретировали признаки единства и универсальности многообразий на примере любого из материалов параграфа

385. Интерпретируйте признак сведения сложного к простому на любом из примеров, рассмотренных в параграфе «квадратные неравенства».

425. Интерпретируйте проявления признака математической красоты единства многообразий, универсальности, неочевидности и сведения сложного к простому в:

a. свойстве 1, b. свойстве 2, c. свойстве 3.

параграфа «зависимость решения квадратного неравенства, от дискриминанта»․

556. Не означает ли единством многообразий?

a. система, b. совокурность.

**Литература**

1. ***Аврелий А. (2017***). Музыке, VI, XIX, 24 М. 2017.
2. ***Большой энциклопедический словарь (2002).*** А–Я. 2-е изд./ Гл. ред. Прохоров А.М. М.: Большая российская энциклопедия, 2002.
3. ***Борев, Ю.Б. (1960).*** Основные эстетические категории. М.: Высшая школа, 1960..
4. ***Birkhoff, G. D. (1956).*** Mathematics of Aesthetics. In: Newman, J.R. (ed.): The World of
5. ***Болтянский В. Г. (1982),*** Математическая культура и эстетика, Матема- тика в школе. 1982, No2.
6. ***Винкельман И. И. (1890),*** История искусства древности, Равель, 1890.
7. Волькенштейн В. М. (193***1)․*** Опыт современной эстетики, М., 1931
8. ***Волошинов А. В. (2000),*** Математика и искусство, М., 2000
9. ***Кобалия О. А., (1985).*** Эстетиеское воспитание при обучении геометрии в средней школе, Дисс. ... канд. пед. наук, М., 1985.
10. ***Котина C. B. (1989),*** Принцип красоты в системе методологических регулятивов естественно - научного познания, Философские науки. 1989. No11. С. 110-117
11. ***Лосев, А.Ф. (1965),*** Шестаков, В.П. История эстетических категорий. М.: Искусство, 1965.
12. ***Мендельсон, Э. (2013).*** Введение в математическую логику. М.: Книга по Требованию, 2013.
13. ***Микаелян, Г.С. (1999, 2006)*** Алгебра–7. Учебник для общеобразовательной школы. Ереван: Эдит Принт, 1999; 2006). (на армянском языке).
14. ***Микаелян, Г.С.(2003).*** Проблемы обучения алгебре. Ереван: Эдит Принт, 2003. 186 c. (на армянском языке).
15. ***Микаелян, Г.С. (2007)*** Алгебра–8. Учебник для общеобразовательной школы. Ереван: Эдит Принт, 2007). (на армянском языке).
16. ***Микаелян, Г.С. (2008)*** Алгебра–9. Учебник для общеобразовательной школы. Ереван: Эдит Принт, 2008). (на армянском языке).
17. ***Микаелян Г. С., (2014).*** Beauty and educational potential of mathematics. Yerevan. 2014. (in Armenian).
18. ***Микаелян Г. С., (2015).*** Beauty and educational potential of mathematics. Yerevan. 2015. (in Armenian).
19. ***Микаелян Г. С., (2019).*** *Э*стетические основы математического образования. Ереван-Черкассы, 2019. 2019.
20. ***Мороз, O.П. (1989)*** Прекрасна ли истина? М.: Знание, 1989.
21. ***Ритм. Vseslov A. URL:*** [http://vseslova.com.ua/word/Ритм-90798](http://vseslova.com.ua/word/%D0%A0%D0%B8%D1%82%D0%BC-90798)
22. ***Саранцев Г. И., (2003)*** Эстетическая мотивация и обучение математике. Саранск, 2003.
23. Словарь иностранных слов (2014) современного русского языка / Сост. Т.В. Егорова. М.: Аделант, 2014.
24. ***Якир М. С (1989).*** Что такое красивая задача?, Математика в школе.- 1989. -No6.
25. ***Цатурян, A.M. (1991).*** Методологический принцип симметрии в курсе физики средней школы. дис. … канд. пед. наук. Санкт-Петербург, 1991
26. Ширакаци, А. (1979). Библиография. Ереван: Советакан грох, 1979. 400 c. (на армянском языке).
27. ***Философская энциклопедия (1960).*** в 5 т. / Глав. ред. Ф.В. Константинов. М.: Советская энциклопедия, 1960. Т. 1. 504 с.; 1962. Т. 2. 575 с.; 1964. Т. 3. 584 с.; 1967. Т. 4. 591 с.; 1970. Т.5. 740 с
28. ***Философский энциклопедический словарь (2010). М.:*** Мысль, 2010. Т. 1.
29. ***Юм, Д. А. (1973). Хатчесон Фрэнсис, Юм Дэвид, Смит Адам. Эстетика. М.:*** Искусство, 1973.
30. ***Boethius (1995).*** De institutione arithmetica. In J.Y. Guillaumin (Ed.). With French translation. Paris; Belles Lettres, 1995.
31. ***Davis, P. J.; Hersh, R. (1981).*** The Mathematial Experience. Boston: Birkhäuser.
32. ***Dreyfus, T.; Eisenberg, T. (1986):*** On the Aesthetics of Mathematical Thought. For the Learning
33. of Mathematics - An International Journal of Mathematics Education, v6, n1, pp. 2–10.
34. ***Dirac, P. (1977).*** In: History of Twentieth Century Physics. Proceedings of the internationalSchool of Physics "Enrico Fermi", Course 57, New York: Academic Press, p. 136.
35. ***Ebeling, W.; Freund, J.; Schweitzer, F. (1998):*** Komplexe Strukturen: Entropie und Information.
36. Stuttgart und Leipzig: Teubner.
37. ***Eysenck, H. (1972).*** Test your abilities. M., 1972.
38. ***Hutcheson, Francis (2004)․*** An Inquiry into the Original of Our Ideas of Beauty and Virtue in Two Treatises.Indianapolis, 2004.
39. ***Le Corbusier (1923).*** Vers une architecture. Paris: G. Crès et Cie, 1923. 230 pp. URL: https://archidea.com.ua/rarity/digest/359032-lekorbyuze-k-arhitekture.
40. ***Poincaré, H. (1956).*** Mathematical Creation. In: J. R. Newman (ed.): The world of mathematics,v4, 7th edition. New York, NY: Simon and Schuster, pp. 2041–2050.
41. ***Weyl, H. (1952). Symmetrie. Basel und Stuttgart: Birkhäuser. Whitcombe, A. (1988):*** Creativity, Imagination, Beauty. Mathematics in School, v17, n2, pp. 13 Whitehead, A. N. (2009). The Adventure of Ideas, Moscow. 2009.

**ԳԻՏԱԿԱՆ ԳԵՂԵՑԻԿԻ ՕԲՅԵԿՏԻՎ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅՈՒՄ**

**ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ**

**Համլետ Սուրենի Միքայելյան**

***Ամփոփում***։ Աշխատանքում դիտարկվում է մաթեմատիկայի և գեղեցիկի փոխհարաբերության հիմնահարցը՝ գեղեցիկի կազմավորմանմեջ մաթեմատիկայի ունեցած դերի և մաթեմատիկայի ու նրա ուսուցման գործընթացի գոեցիկ լինելու տեսանկյունից։ Աշխատանքում խնդիրը պարզաբանվում է գեղեցիկի գիտական կամ մաթեմատիկական հայտանիշներին բավարարելու տեսանկյունից։ Գիտական գեղեցիկի հայտանիշներն առաջին անգամ շրջանառության մեջ է դրել տասնութերոդ դարի շոտլանտացի արվեստագետ Ֆրեբսիս Հատրեսոնը։ Ինչպես Հատչեսոնը, այնպես էլ նրա բազմաթիվ հետևորդներըառաջադրելով որոշ բնութագրիչներ, գիտական կամ մաթեմատկական օբյելտների գեղեցկությունը գնահատում են այդ բնութագրիչներին բավարարելու տեսանկյուից։ Ժամանակի ընթացքում գոյացել է նման բնութագրիչների կամ հայտանիշների բավականին մեծ քանակություն և դրանց դասակարգման խնդիրը դարձել է արդիական։ Հեղինակը կատարելով նմանատիպ դասակարգում, հիմքում դնելով գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ տեսանկյունները։ Աշխատանքում դիտարկվում են մայն օբյեկտիվ տեսանկյունը, և առկա հայտանիշները տրահվումեն երեք խմբի՝ կազմավորող, միավորող և տրամաբանական հակյտանիշների խմբեր։ Աշխատանքում հիմնականում համակարգված ձևով շարադրաբում են այդ ուղղությամբ հեղինակի նախկինում ստացված արդյունքները, արվում են որոշ նոր շեշտադրումներ։

***Բանալի բառեր։*** Գեղեցիկը, մաթեմատիկա, մաթեմատիկականկրթություն, գիտսկսն գեղեցիկի օբյեկտիվ հայտանիշներ, կազմավորող հայտանիշներ, միաբորող հայտանիշներ, տրամաբանական հայտանիշներ։

**ОБЪЕКТИВНЫЕ ПРИЗНАКИ НАУЧНОГО ПРЕКРАСНОГО В МАТЕМАТИКЕ**

**И В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ**

**Гамлет Сурени Микаелян**

***Резюме***. В работе рассматривается вопрос о соотношении математики и красоты с точки зрения роли математики в формировании красоты и экзистенциальной природы математики и процесса ее преподавания. В работе проблема проясняется с точки зрения удовлетворения научных или математических характеристик красоты. Характеристики научной красоты впервые были введены в оборот шотландским художником XVIII века Фребсисом Хэтчесоном. И Хатчесон, и его многочисленные последователи, предлагая определенные характеристики, оценивают красоту научных или математических объектов с точки зрения удовлетворения этим характеристикам. Со временем таких характеристик или признаков появилось довольно большое количество, и проблема их классификации стала актуальной. Автор, составив подобную классификацию, основываясь на объективных и субъективных аспектах красоты. В работе рассматривается только объективный аспект, а имеющиеся признаки разделены на три группы: формообразующие, объединяющие и группы логических антонимов. В работе в основном систематически излагаются полученные ранее автором результаты в этом направлении, а также делаются некоторые новые акценты.

***Ключевые слова****:* прекрасное, математика, математическое образование, объективные признаки научного прекрасного, формирующие признаки, объединяющие признаки, логические признаки.

**OBJECTIVE FEATURES OF SCIENTIFIC BEAUTY IN MATHEMATICS**

**AND IN MATHEMATICAL EDUCATION**

**Hamlet Sureni Mikayelyan**

***Summary****.* The work considers the issue of the relationship between mathematics and beauty from the perspective of the role of mathematics in the formation of beauty and the existential nature of mathematics and its teaching process. The work clarifies the problem from the perspective of satisfying the scientific or mathematical characteristics of beauty. The characteristics of scientific beauty were first put into circulation by the eighteenth-century Scottish artist Frebsis Hatcheson. Both Hutcheson and his numerous followers, proposing certain characteristics, evaluate the beauty of scientific or mathematical objects from the perspective of satisfying these characteristics. Over time, a fairly large number of such characteristics or signs have emerged, and the problem of their classification has become relevant. The author, having made a similar classification, based on the objective and subjective aspects of beauty. The work considers only the objective aspect, and the existing signs are divided into three groups: forming, unifying, and groups of logical antonyms. The work mainly systematically presents the author's previously obtained results in this direction, and some new emphases are made.

***Keywords:*** beauty, mathematics, mathematical education, objective features of scientific beauty, formative features, unifying features, logical features.

***Получено в редакцию - 11.06.2024***

***Рецензирована – 13.02.2025***

***Отправлен на сайт – 17.05.2025***