УЧИТЕЛЮ МАТЕМАТИКИ О РАЦИОНАЛЬНЫХ, ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ И ДРОБНЫХ ВЫРАЖЕНИЯХ

ORCID 0000-0002-4951-3259
Лодатко Евгений Александрович
Черкасский национальный университет имени Богдана Хмельницкого, Украина

Лодатко Е.А., доктор педагогических наук, профессор

В математической подготовке будущих *учителей математики* содержательно-методическая линия развития понятия числа определяет овладение представлениями о различных числовых множествах, среди которых важное место отводится действительным числам. Измерения, геометрические построения, решение уравнений, вычисление значений числовых выражений и понимание процедурной сущности этих процессов являются важнейшим показателем уровня математической культуры учителей средней школы.

Формируемые при этом у них представления о развитии понятия числа имеют исключительный мировоззренческий потенциал и могут рассматриваться как основа для понимания диалектики соотношения рационального и иррационального (Нивен, 1996), конечного и бесконечного, сходимости и расходимости, ограниченности и неограниченности, а также некоторых других вопросов. Когда речь заходит о выражениях с иррациональностями, чаще всего они связываются с корнями различных степеней или числом π. Реже «источники» иррациональностей усматриваются в тригонометрических и логарифмических выражениях, числе Эйлера и др.

Несмотря на то, что математическая деятельность будущего учителя еще со школы предполагает систематическое обращение с корнями квадратными (и в меньшей степени – кубическими), выражения с иррациональностями и процедуры оперирования ими остаются вне познавательных приоритетов, а используются как «инструментальные средства» при решении задач. Однако для учителя математики такой подход не является методически приемлемым, поскольку ему приходится оперировать не только рациональными выражениями, но и иррациональными.

Учитывая, что *для учителей математики* представления о числовых множествах и способах представления их элементов являются одним из важнейших показателей не только уровня математической подготовки, но и математикой культуры вообще, обратимся к вопросам, касающимся «взаимосвязей рациональностей и иррациональностей».

Возьмем для начала выражение с иррациональностями $\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}$ и попробуем найти его значение.

Вычисляя последовательно (с помощью калькулятора) выражение $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, … уже на 8-м шаге получим следующее значение

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}}_{8} \approx 1,9999.$$

При продолжении процедуры вычислений четыре разряда после запятой останутся без изменений. Поэтому логично предположить, что дальнейшие вычисления покажут сходимость результата к 2.

Выясним, действительно ли это так.

Предположим, что имеет место равенство

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}} = 2. \qquad (1)$$

Возведем левую и правую части этого равенства во вторую степень и получим равенство $2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}} = 4$.

После переноса в нем слагаемого 2 из левой части в правую и приведения подобных членов это равенство сведется к равенству (1).

Если далее попробуем снова применить такую же последовательность операций (действий), то снова придем к равенству (1). Именно это дает основания считать предположение правильным, а равенство (1) истинным.

Обобщим теперь предыдущее равенство, представив его в виде

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+...}}} = b, \qquad (2)$$

где a, $b \in \boldsymbol{N}$, и попробуем выяснить, для каких натуральных a и b оно имеет место.

Поскольку a и b оказываются такими, что после возведения обеих частей равенства (2) во вторую степень

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}\right)^2=b^2 \Rightarrow a+\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}_{b}=b^2$$

должно выполняться соотношение $a + b = b^2$, то зависимость между a и b представляется в виде:

$$a = b^2 - b = b\cdot(b-1). \qquad (3)$$

Воспользовавшись этим результатом, можем утверждать, что любое натуральное число $b>1$ может быть представлено в виде (2).

Примечание 1. Очевидно, натуральное число 1 с помощью равенства (2) представить не удастся, поскольку это равенство для $b = 1$ оказывается ложным.

Для $b = 3, 4, 5, \ldots$ с помощью соотношения (3) элементарно находятся соответствующие значения $a = 6, 12, 20, \ldots$, что дает возможность «построить ряд», начатый равенством (1):

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}=3 \qquad (4)$$

$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots}}}=4 \qquad (5)$$

$$\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots}}}=5; \qquad (6)$$

…

Если же возникнет необходимость представить в виде иррационального выражения какое-то произвольное число из ряда натуральных чисел, например, $b = 71$, то по формуле (3) можем найти $a = 71\cdot 70 = 4970$ и тогда выражение (2) примет вид:

$$\sqrt{4970+\sqrt{4970+\sqrt{4970+\ldots}}}=71.$$

Изложенное выше позволяет прийти к выводу, что любое натуральное число $b>1$ может быть представлено в виде иррационального выражения (2).

В свою очередь, соотношение (3) дает основания обобщить результат, утверждая, что для произвольного $b>1$, $b\in\boldsymbol{Q}_+$ всегда найдется такое $a\in\boldsymbol{Q}_+$, которое удовлетворяет соотношению (2).

Например, взяв $b=\dfrac{3}{2}$, можем из соотношения (3) найти значения $a=\dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}-1\right)=\dfrac{3}{4}$ и тогда равенство (2) приобретет вид

$$\sqrt{\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{3}{4}+\ldots}}}=\frac{3}{2}.$$

Вообще говоря, зависимость между a и b, обозначенная в соотношении (3), имеет место и в множестве положительных действительных чисел $\boldsymbol{R}_+$, поскольку для любого значения $b>1$ всегда существует произведение $b\cdot(b-1)\in\boldsymbol{R}_+$, которое определяет значения a.

Например, полагая $b=\pi$, можем найти $a = \pi\cdot(\pi - 1) = \pi^2 - \pi$ и на основании соотношения (2) прийти к равенству

$$\sqrt{(\pi^2-\pi)+\sqrt{(\pi^2-\pi)+\sqrt{(\pi^2-\pi)+...}}}=\pi .$$

Анализируя равенство (2), отметим, что оно имеет синтаксическую структуру

$$\sqrt{a+\underbrace{\sqrt{a+\underbrace{\sqrt{a+\underbrace{\sqrt{a+...}}_{b}}}_{b}}}_{b}}=b, \qquad (7)$$

то есть структуру вида

$$P=P_n[S,\ P_{n-1}], \qquad (8)$$

где $n\in\boldsymbol{N}$, $n\to\infty$, а S – некоторая совокупность элементов, отличных от P_i.

Примечание 2. Совокупность S элементов, вообще говоря, может быть и пустой. Тогда формула (8) упростится к виду

$$P=P_n[P_{n-1}].$$

Вслед за Девидом Гелернтером (Гелернтер, 2018) синтаксическую структуру P следует считать рекурсивной, поскольку в ней «форма целого повторяется в форме частей».

Если развернуть формулу (8), то будем иметь выражение

$$P=P_n[S,\ P_{n-1}[S,\ P_{n-2}[S,\ P_{n-3}[S,\ldots]]]], \qquad (9)$$

в основе которого, очевидно, лежит рекурсивная синтаксическая структура (Лодатко, 2004) вида (8).

Попробуем теперь обобщить результат на случай произвольных значений $a\in\boldsymbol{N}$ и соответствующих действительных значений $b>1$, связанных отношением (2).

В этом случае зависимость (3) сводится к уравнению $b^2 - b - a = 0$, откуда при любом $a\in\boldsymbol{N}$ можем найти корни

$$b_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-a)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2} .$$

Поскольку $b>1$, то берем $b=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, которое и должно быть тем значением, которое удовлетворяет равенство (2).

Действительно, если $b=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, то равенство (2) принимает вид

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+...}}}=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} . \qquad (10)$$

Возводя обе его части в квадрат, получим

$$a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}=\left(\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)^2 \tag{11}$$

Учитывая, что

$$\left(\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{1+4a}+1+4a}{4}=\frac{1+2a+\sqrt{1+4a}}{2},$$

равенство (11) принимает вид

$$a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}=\frac{1+2a+\sqrt{1+4a}}{2}, \tag{12}$$

откуда получаем

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}=\frac{1+2a+\sqrt{1+4a}}{2}-a=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}=b, \tag{13}$$

следовательно, исходное равенство (2) имеет место.

В частности, полагая a=1, 2, 3, 4, … последовательно получаем ряд равенств, среди которых найдется место и для уже приведенных выше равенств (4)–(6):

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}=\frac{1+\sqrt{1+4\cdot 1}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{14}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}=\frac{1+\sqrt{1+4\cdot 2}}{2}=\frac{1+\sqrt{9}}{2}=2,$$

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots}}}=\frac{1+\sqrt{1+4\cdot 3}}{2}=\frac{1+\sqrt{13}}{2},$$

…

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}=\frac{1+\sqrt{1+4\cdot 6}}{2}=\frac{1+\sqrt{25}}{2}=3,$$

…

Среди этих равенств отдельное внимание привлекает равенство (14), поскольку числовое выражение в его правой части

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887498948482\ \ldots$$

известно как отношение **Ф**, связанное с «золотым сечением» (Бендукидзе, 1973; Савин, 1997; Лаврус, 2000).

Соотношение (10) элементарно обобщается для случаев, когда a является положительным рациональным ($a \in \boldsymbol{Q}_{+}$) или положительным иррациональным числом ($a \in \boldsymbol{I}_{+}$).

Поскольку правая часть соотношения (10) удовлетворяет неравенству $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}>1$, то для любых $a \in \boldsymbol{R}_+$ всегда может быть найдено соответствующее значение $b=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Таким образом, любое положительное действительное число $b>1$, удовлетворяющее соотношению $b=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}$ может быть представлено также в виде $b=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, т.е. имеет место соотношение (10).

Оперирование иррациональными и дробными выражениями, о чем шла речь выше, а также равенство (14), продуцируют изучение возможности представления иррациональных выражений в виде «обыкновенных» дробей с целыми (или рациональными) числителями и знаменателями.

Для начала воспользуемся известной формулой представления разности квадратов двух чисел в виде произведения суммы и разности этих чисел. Тогда можем записать, что имеет место равенство $\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2=1$.

Преобразуя левую часть в произведение, получим $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)=1$. Разделив обе части равенства на положительное число $\sqrt{2}+1$, получим формальное соотношение $\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, которое после элементарного преобразования примет вид

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}} \tag{15}$$

Поскольку выражение в правой части также содержит $\sqrt{2}$, то к последнему равенству применимо рекурсивное соотношение (8)

В результате получаем

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)},$$

откуда после приведения подобных членов приходим к равенству

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}, \tag{16}$$

В последнем равенстве правая часть снова содержит $\sqrt{2}$, а значит к нему опять применимо рекурсивное соотношение (15), что позволяет преобразовать равенство (16) к виду:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}}}} \qquad (17)$$

Продолжая применять к правой части равенства соотношение (15), получим следующее рекурсивное представление $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}} \qquad (18)$$

Правую часть такого соотношения принято называть *цепной дробью* и записывать в виде $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$, где a_0 – целое число, a_i – натуральные числа, удовлетворяющие соотношению

$$b=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots}}}$$

С учетом этого определения можно соотношение (18) компактно представить в виде:

$$\sqrt{2}=[1; 2, 2, 2, \ldots]=[1; \langle 2\rangle],$$

где $\langle 2\rangle$ обозначает период.

Если последовательно вычислять значения [1; 2], [1; 2, 2], [1; 2, 2, 2], …, то на пятом шаге получим весьма хорошее приближение $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}\approx[1; 2] = 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1{,}5;$$

$$\sqrt{2}\approx[1; 2, 2] = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=1+\frac{2}{5}=1{,}4;$$

$$\sqrt{2}\approx[1; 2, 2, 2] = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=1+\frac{5}{12}=1{,}41(6);$$

$$\sqrt{2}\approx[1; 2, 2, 2, 2]\approx 1{,}41379;$$

$$\sqrt{2}\approx[1; 2, 2, 2, 2, 2]\approx 1{,}41428.$$

Если учесть, что $2=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$ (Лодатко, 2019), то соотношение (18) можем представить и таким «неожиданным» способом:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}+\cfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}+\cfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}+\ldots}}},$$

или в более компактном виде

$$\sqrt{2}=\left[1;\left\langle\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}\right\rangle\right],$$

где $\left\langle\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}\right\rangle$ будет периодом.

Попробуем теперь аналогичным образом представить $\sqrt{3}$.

Учитывая, что $(\sqrt{3})^2-1^2=2$, запишем

$$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=2.$$

Тогда, действуя так же, как и в случае представления $\sqrt{2}$, получим сначала выражение

$$\sqrt{3}=1+\frac{2}{1+\sqrt{3}},$$

а после применения рекурсивного соотношения (8) – как и в случае с формулой (15) – придем к следующему представлению $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{2}{1+\left(1+\cfrac{2}{1+\sqrt{3}}\right)}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\ddots}}}$$

Однако $\sqrt{3}$ можно представить иначе, если учесть, что $2^2-(\sqrt{3})^2=1$.

Разлагая в произведение разность квадратов в левой части последнего равенства, запишем

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1.$$

Из чего следует, что

$$\sqrt{3}=2-\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

и после применения рекурсивного соотношения (8) окончательно получим

$$\sqrt{3}=2-\cfrac{1}{2+\left(2-\cfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right)}=2-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\ddots}}}},$$

которое может быть компактно записано в виде

$$\sqrt{3}=[2–; 4–, 4–, 4–, \ldots]=[2–; \langle 4– \rangle],$$

где ⟨4–⟩ обозначает период.

Вычисляя последовательно значения [2–; 4–], [2–; 4–, 4–], [2–; 4–, 4–, 4–] и далее, уже на четвертом шаге получим весьма хорошее приближение $\sqrt{3}$ – с точностью до пятого (!) знака:

$$\sqrt{3}\approx [2–; 4–] = 2-\frac{1}{4}=1{,}75$$

$$\sqrt{3}\approx [2–; 4–, 4–] = 2-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4}}=1{,}7(3)$$

$$\sqrt{3}\approx [2–; 4–, 4–, 4–] = 2-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4}}}\approx 1{,}73214$$

$$\sqrt{3}\approx [2–; 4–, 4–, 4–, 4–] = 2-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4}}}}\approx 1{,}73205$$

Если исходить из того, что $\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2=4$ и, соответственно, $\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2}{4}=1$, то $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=1$.

Тогда $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{5}+1}{2}}=\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{5}-1+2}{2}}=\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\cfrac{2}{2}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Используя рекурсивное соотношение (8), далее получим:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{5}-1}{2}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{5}-1}{2}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{5}-1}{2}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}$$

Добавив к обеим частям последнего равенства по 1, окончательно получим:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}$$

Но, как следует из соотношения (14), левая часть полученного «равенства» представляется также в виде $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}$, откуда приходим к следующему *красивому* равенству

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}},$$

левая и правая части которого определяют число φ=1,6180339887498948482…, известное как золотое сечение (Савин, 1997).

Аналогичным образом, вообще говоря, можно представлять (Хованский, 1956) квадратичные иррациональности (иррациональные корни квадратных уравнений с целыми коэффициентами), а также некоторые иные.

Например, число π можно представить с использованием формулы лорда Вильяма Браункера (Wallis, 1656: 182)

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\ddots}}}}}}$$

или в ином варианте таким образом:

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{6 + \cfrac{11^2}{6 + \ddots}}}}}}.$$

Не менее эффектным можно считать представление числа *e*

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}}}}}}} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, ...]$$

однако процедура получения его значения в виде цепной дроби (как и числа π) может стать отдельной темой для обсуждения с будущими учителями математики.

На основании изложенного и с учетом известных положений, можем акцентировать внимание на том, что *квадратичные иррациональности* (иррациональные корни квадратных уравнений с целыми коэффициентами), и только они, раскладываются в *периодические* цепные дроби (Арнольд, 2009; Устинов, 2010). Другие иррациональности (как π, *e* и проч.) также могут разлагаться в цепные дроби, однако получаемые разложения не будут периодическими.

Основываясь на рассмотренных выше процедурах, будущий учитель математики сможет приблизиться к осмыслению идеи иррационального числа, способов его представления и использования в измерениях величин, а также при организации кружковой работы с учащимися.

Литература

Арнольд, В.И. **(2009).** Цепные дроби. М.: Изд-во МЦНМО. 40 с.

Бендукидзе, А.Д. **(1973).** Золотое сечение. *Квант*. № 8. С. 22.

Гелернтер, Д. **(2018).** Рекурсивная структура. *Веселка*. URL: https://www.e-reading.club/chapter.php/1046120/96/Eta_kniga_sdelaet_vas_umnee._Novye_nauchnye_koncepcii_effektivnosti_myshleniya.html.

Лаврус, В. **(2000).** Золотое сечение. *N-t.ru*. URL: http://n-t.ru/tp/iz/zs.htm

Лодатко, Е.А. (2004). Рекурсивные лингвистические структуры. *Теоретические и прикладные проблемы русской филологии: Научно-метод. сборник*. Отв. ред. В.А. Глущенко. Славянск: СГПУ. Вып. XII. С. 86–95.

***Лодатко, Е.А.* (2019).** О числовых выражениях с иррациональностями. *Математика и математическое образование*: сборник трудов по материалам IX международной научной конференции «Математика. Образование. Культура», 24–26 апреля 2019 г., Россия, г. Тольятти / под общ. ред. Р.А. Утеевой. Тольятти: Изд-во ТГУ. С. 103–108.

***Нивен, А.* (1996).** Числа рациональные и иррациональные. Пер. с англ. М.: Мир. 200 с.

***Савин, А.* (1997).** Число Фидия – золотое сечение. *Квант*. № 6. С. 32–33.

***Устинов, А.* (2010).** Цепные дроби вокруг нас. Квант. С. 32–33.

***Хованский, А.Н.* (1956).** Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М.: Гос. изд-во технико-теоретич. литературы. 203 с.

***Wallis, J.* (1656),** Arithmetica Infinitorum, sive Nova Methodus Inquirendi in Curvifi neorum Quadraturam aliaq, difficiliora Mathefeos Problemata. OXONII, Typis LEON: LICHFIELD Academix Tipographi, Inpenfis THO. ROBINSON.

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՒՍՈՒՑՈՒՄ՝ ՌԱՑԻՈՆԱԼ, ԻՌԱՑԻՈՆԱԼ ԵՎ ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Լոդատկո Եվգենի Ա.

Ամփոփում: Դպրոցական կրթության համակարգում թվի գաղափարի զարգացման մասին պատկերացումներն ունեն բացառիկ աշխարհայացքային ներուժ, ինչը նաև հիմք է հանդիսանում ռացիոնալի և իռացիոնալի, վերջավորի և անվերջի, նմանության և ոչ նմանության, սահմանափակության և անսահմանափակության հարաբերակցության դիալեկտիկայի. ինչպես նաև մի քանի այլ հարցեր ըմբռնման համար: Սակայն, երբ խոսքը վերաբերում է իռացիոնալ արտահայտություններին, ամենից հաճախ այս հարցերը կապված են ոչ բացասական ամբողջ կամ ռացիոնալ թվերից տարբեր աստիճանի արմատների կամ π թվից հետ, ինչը զգալիորեն նեղացնում է մաթեմատիկայի իռացիոնալության հասկացության էությունը իմաստավորման մակարդակը:

Հոդվածում վերլուծվում են իռացիոնալ թվերն ու արտահայտությունները ռացիոնալ արտահայտությունների տեսքով ներկայացնելու եղանակները, ինչպես նաև այն հնարավորությունները, որոնք կարող են օգտագործվել մաթեմատիկայի ապագա ուսուցչի մաթեմատիկական մտահորիզոններն ընդլայնելու համար: Ցուցադրվում է իռացիոնալության և շղթայական կոտորակների միջև պոտենցիալ կապի առկայությունը: Ուշադրությունը կենտրոնացած է այն բանի վրա, որ քառակուսային իռացիոնալությունները (ամբողջ թվային գործակիցներով քառակուսային հավասարումների իռացիոնալ արմատները) և միայն դրանք են վերածվում պարբերական շղթայական կոտորակների: Այլ իռացիոնալություններ, ինչպիսիք են π, e և

այլն, կարող են նույնպես վերլուծվել շղթայական կոտորակների տեսքով, սակայն այդ վերլուծությունները պարբերական չեն լինի;

Հենվելով վերը քննարկված ընթացակարգերի վրա մաթեմատիկայի ապագա ուսուցիչը կկարողանա մոտենալ իռացիոնալ թվի գաղափարի իմաստավորմանը, նրա ներկայացման եղանակների և մեծությունների չափման մեջ օգտագործելու ըմբռնմանը, ինչպես նաև սովորողների հետ խմբակային աշխատանքների կազմակերպմանը:

Բանալի բառեր: բնական թիվ, ռացիոնալ թիվ, ռացիոնալ արտահայտություններ, իռացիոնալ թիվ, իռացիոնալ արտահայտություններ, շղթայական կոտորակ, մաթեմատիկայի ուսուցիչ:

FOR THE MATHEMATICS TEACHER-TRAINEE: RATIONAL, IRRATIONAL AND FRACTIONAL EXPRESSIONS

Lodatko Yevgeny (Eugen) A.

Summary. This study focuses on the concept of the rational, irrational and fractional, and methods of their expressions. In the system of school education, the ideas related to developing the concept of number have an exceptional worldview potential, being the basis for perceiving the dialectical correlation of the rational and irrational, finite and infinite, convergent and divergent, limited and unlimited, as well as other issues. However, when it comes to the expressions with irrationalities, most often these matters are associated with roots of various degrees from non-negative integer or rational numbers, or the number **π**, which significantly narrows the depth of teacher-trainees' perceiving and conceptualizing the essence of the concept of irrationality in mathematics.

This article analyzes the ways of representing irrational numbers and expressions in the form of rational expressions, as well as the possibilities that can be exploited in order to expand mathematical horizons of mathematics teacher-trainees. Furthermore, in the article the existing potential connection between irrationalities and chain fractions is illustrated.

A special emphasis in the study is placed on the fact that only quadratic irrationalities (irrational roots of quadratic equations with integer coefficients) get decomposed into periodic chain fractions. Other irrationalities such as **π**, **e**, etc. can also break down into chain fractions, but these breakdowns will not be periodic.

It is maintained that based on the procedures mentioned above, mathematics teacher-trainees will be able to conceptualize more deeply the idea of an irrational number, ways of its representation and usage in measuring quantities, as well as in organizing and managing circle work with learners.

Keywords. natural number; rational number; rational expressions; irrational number; irrational expressions; chain fraction; mathematics teacher-trainee.

УЧИТЕЛЮ МАТЕМАТИКИ О РАЦИОНАЛЬНЫХ, ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ И ДРОБНЫХ ВЫРАЖЕНИЯХ

Лодатко Евгений А.

Резюье. В системе школьного обучения представления о развитии понятия числа имеют исключительный мировоззренческий потенциал, являясь основой для понимания диалектики соотношения рационального и иррационального, конечного и бесконечного, сходимости и

расходимости, ограниченности и неограниченности, а также некоторых других вопросов. Однако, когда речь заходит о выражениях с иррациональностями, то чаще всего эти вопросы связываются с корнями различных степеней из неотрицательных целых или рациональных чисел или числом $\boldsymbol{\pi}$, что существенно сужает уровень осмысления сущности понятия иррациональности в математике.

В статье анализируются способы представления иррациональных чисел и выражений в виде рациональных выражений, а также возможности, которые могут использоваться для расширения математического кругозора будущего учителя математики. Показывается существование потенциальной связи иррациональностей с цепными дробями.

Акцентируется внимание на том, что квадратичные иррациональности (иррациональные корни квадратных уравнений с целыми коэффициентами), и только они, раскладываются в периодические цепные дроби. Другие иррациональности, такие как $\boldsymbol{\pi}$, **е** и проч. также могут разлагаться в цепные дроби, однако эти разложения не будут периодическими.

Основываясь на рассмотренных выше процедурах, будущий учитель математики сможет приблизиться к осмыслению идеи иррационального числа, способов его представления и использования в измерениях величин, а также при организации кружковой работы с учащимися.

Ключевые слова: натуральное число; рациональное число; рациональные выражения, иррациональное число; иррациональные выражения, цепная дробь; учитель математики.

Получено в редакцию - 04.08.2022
Рецензирована – 17.08.202
Отправлен на сайт – 23.09.2022