Երրորդ ոտնակային քառանկյունների մասին

Ավագ Տելմանի Կոստանյան
Հայկական ԱԷԿ

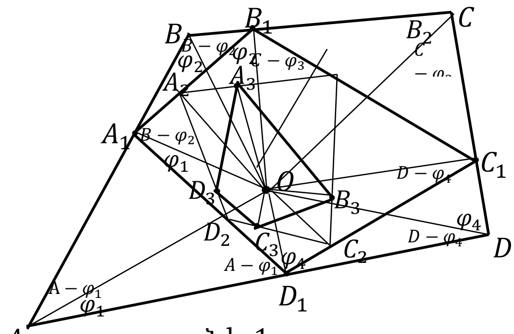
Կոստանյան Ա. Տ. *ինժեներ*
Հայկական ատոմակայան

Ներածություն

Նախորդ աշխատանքում [1] ապացուցվել է, որ կամայական ուռուցիկ քառանկյան ներքին տիրույթի ցանկացած M կետի համար դրա չորրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է սկզբնականին: Այս աշխատանքում ցույց կտանք, որ քառանկյան ներքին տիրույթում գոյություն ունի O կետ, որի նկատմամբ երրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է սկզբնականին:

Թեորեմ 1: Կամայական ABCD ուռուցիկ քառանկյան ներքին տիրույթում գոյություն ունի O կետ, որի նկատմամբ երրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է ABCD քառանկյանը:

Դիցուք ABCD-ն որևէ ուռուցիկ քառանկյուն է: Ենթադրենք, որ O կետը որոնելին է և դրա նկատմամբ երրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է սկզբնականին (նկ. 1): O կետը միացնենք քառանկյան A, B, C, և D գագաթներին: O կետը գագաթներին միացնող ուղիղները քառանկյան անկյունները տրոհում են մասերի (φ_1; A $-\ \varphi_1$), (φ_2; $B-\varphi_2$), ($\varphi_3-C-\varphi_3$) և ($\varphi_4, D-\varphi_4$): Ներմուծենք O կետի նկատմամբ A_1 B_1 C_1 D_1, A_2 B_2 C_2 D_2 և A_3 B_3 C_3 D_3 ոտնակային քառանկյունները: Այստեղից A_3= φ_1+$D-\varphi_4$, B_3=φ_2+ A-φ_1, C_3=φ_3+B$-\varphi_2$ և D_3=φ_4+$C-\varphi_3$: Կարող ենք հաշվել O կետով և ABCD քառանկյան գագաթներով կազմավորված AOC և BOD անկյունների մեծությունները: Քառանկյուն AOCB-ից ստանում ենք ∠AOC= 360^o-(A $-\ \varphi_1$+$B+\varphi_3$), իսկ քառանկյուն BODC-ից՝ ∠BOD= 360^o-($B+\varphi_2$+$C+\varphi_4$): Եթե ընդունենք $A_3B_3C_3D_3$ երրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է ABCD քառանկյանը, ապա A_3=B, B_3=C, C_3=D և D_3=A, որտեղից գումարելով B_3+C_3=C+D= φ_2+A $-\ \varphi_1$+$B$$-\varphi_2$+$\varphi_3$=A $-\ \varphi_1$+$B+\varphi_3$, իսկ C_3+D_3=A+D=φ_3+$B-\varphi_2$+φ_4+$C-\varphi_3$=$B-\varphi_2$+$C+\varphi_4$: Հետևաբար կարելի է հաշվել



Նկ. 1

$\angle AOC = 360^o - (A - \varphi_1 + B + \varphi_3) = 360^o - (C+D)$,

$\angle BOD = 360^o - (B - \varphi_2 + C + \varphi_4) = 360^o - (A+D)$:

Այսպիսով O կետը AOC և BOD աղեղների հատման կետն է: Ուրեմն տեղի ունի հետևյալ պնդումը: Եթե ABCD ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերի վրա կառուցենք համապատասխան 360^o-(D+A) և 360^o-(C+D) աղեղնային մեծությունները, որի յուրաքանչյուր կետից AC և BD անկյունագծերը կերևան համապատասխանաբար 360^o-(C+D) և 360^o-(A+D) անկյունների տակ, ապա այդ աղեղների հատման O կետի նկատմամբ երրորդ ոտնակային $A_3B_3C_3D_3$ քառանկյունը նման է սկզբնակային ABCD քառանկյունին:

Հավասարասրուն սեղանների մի դասի մասին

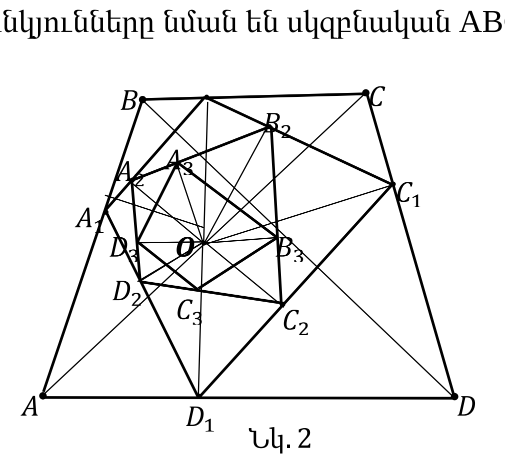
Դիտարկենք հավասարասրուն սեղանի ոտնակային քառանկյունների նմանության մասին հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 2: Հավասարասրուն սեղանի անկյունագծերի միջնակետերի նկատմամբ առաջին, երկրորդ և երրորդ ոտնակային քառանկյունները նման են սկզբնական հավասարասրուն սեղանին:

Ապացուցում: Տրված է ABCD հավասարասրուն սեղան (նկ. 2)

$\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle C$ և $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^o$:

Համաձայն թեորեմ 1-ի ∠AOC= 360^o-(C+D) իսկ $\angle BOD = 360^o - (D + A)$, քանի որ C+D=$180^o$ հետևաբար $\angle AOC = 360^o - 180^o = 180^o$, ուրեմն A, O, C կետերը պատկանում են միևնույն ուղղի, իսկ OD=360^o-(D+A)= 360^o-2A, այս անկյան աղեղը կհատվի AC անկյունագծի հետ O կետում, որի նկատմամբ $A_3B_3C_3D_3$ ոտնակային քառանկյունը նման է ABCD հավասարասրուն սեղանին: Նման ձևով կարելի է ցույց տալ, որ O կետի նկատմամբ $A_1B_1C_1D_1$ առաջին և $A_2B_2C_2D_2$ երկրորդ ոտնակային քառանկյունները նման են սկզբնական ABCD սեղանին:



Նկ. 2

Հաշվենք A_2 B_2 C_2 D_2 ոտնակային քառանկյան անկյումները մեծությունները՝

$A_2= \varphi_1$+C$-\varphi_3$, $B_2= \varphi_2+D-\varphi_4$, $C_2= \varphi_3$+A$-\varphi_1$, $D_2= \varphi_4+B-\varphi_2$:

Ընդունելով $A_2=B$, $B_2=D$, $C_2=A$, $D_2=C$ կունենանք

B= φ_1+C$-\varphi_3$, D= $\varphi_2+D-\varphi_4$, A= φ_3+A$-\varphi_1$, C= $\varphi_4+B-\varphi_2$, որտեղից

$\varphi_1=\varphi_3$, $\varphi_2=\varphi_4$, հետևաբար,

$$\angle AOC = 360^o - (\mathrm{A}-\varphi_1+B+\varphi_3) = 360^o - (\mathrm{A}+\mathrm{B}) = 180^o,$$

$$\angle BOD = 360^o - (B-\varphi_2+C+\varphi_4) = 360^o - (\mathrm{B}+\mathrm{C}):$$

Հաշվենք $A_1B_1C_1D_1$ ոտնակային քառանկյան անկյունների մեծությունները՝

$A_1= \varphi_1$+B$-\varphi_2$, $B_1= \varphi_2$+C$-\varphi_3$, $C_1= \varphi_3$+D$-\varphi_4$, $D_1= \varphi_4$+A$-\varphi_1$: Ընդունելով A_1=B, B_1=C, C_1=D և D_1=A կունենանք B= φ_1+B$-\varphi_2$, C= φ_2+C$-\varphi_3$, D= φ_3+D$-\varphi_4$, A= φ_4+A$-\varphi_1$, որտեղից $\varphi_1=\varphi_2$, $\varphi_2=\varphi_3$, $\varphi_3=\varphi_4$, $\varphi_4=\varphi_1$:

$\angle AOC = 360^o - (\mathrm{A}-\varphi_1+B+\varphi_3) = 360^o - (\mathrm{A}+\mathrm{B}) = 180^o$,

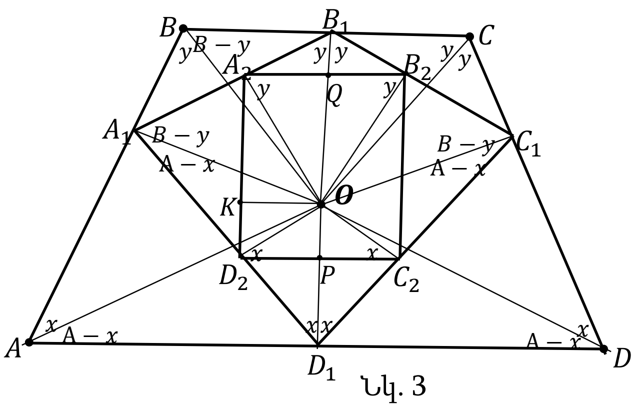
$\angle BOD = 360^o - (B-\varphi_2+C+\varphi_4) = 360^o$-(B+C):

Հետևաբար AC անկյունագծի O կետում կառուցված առաջին և երկրորդ ոտնակային քառանկյունները նույնպես նման են տրված ABCD հավասարասրուն սեղանին:

Թեորեմ 3: ABCD հավասարասրուն սեղանի հիմքերի միջնուղղահայացի վրա գոյություն ունի O կետ, որի նկատմամբ երկրորդ ոտնակային քառանկյունը քառակուսի է:

Ապացուցում: Տրված է ABCD հավասարասրուն սեղան, միջնուղղահայացի որևէ O կետում կառուցենք երկրորդ ոտնակային քառանկյունը (նկ.3): O կետը միացնենք A, B, C, և D գագաթներին: O կետով և գագաթներով տրոհված անկյունները կլինեն ∠OAB=∠ODC=x իսկ ∠OBA=<OCD=y: Հաշվենք $A_2B_2C_2D_2$ քառանկյան անկյունների մեծությունները, ընդունելով որ $A_2B_2C_2D_2$ քառանկյունը քառակուսի է, կունենանք A_2B_2 = B_2C_2= C_2D_2= D_2 A_2=a: Հետևաբար, OK=$\frac{a}{2}$, իսկ OP+OQ=a կունենանք

$\frac{OP}{OK}$=tgx OP= OK tgx , $\frac{OQ}{OK}$=tgy, OQ=OK tgy:



Նկ. 3

Գումարելով կստանանք OP+OQ=OK(tgx+tgy) կամ a=$\frac{a}{2}(tgx+tgy)$ որտեղից tgx+tgy=2:

Հետևաբար O կետով և AB կողմով և CD կողմերով կազմված OBA և OAB անկյունների տանգենսների գումարը հավասար է երկուսի: Տեսնում ենք որ, քառակուսու կառուցելիությունը կապված է tgx+tgy=2 պայմանի հետ, որտեղ x–ը և y-ը AB սրունքի հետ OA և OB ուղիղների կազմած անկյունների մեծություններն են:

Գրականության ցանկ

1. ***Կոստանյան Ա.,*** Ոտնակային քառանկյունների մասին, «Մաթեմատիկան դպրոցում», թիվ N4,(117), էջ 92-96, 2024:
2. ***Кокстер Г.С.М., Грейтцер С.Л.,*** Новые встречи с геометрией, Москва, “Наука“, 1978г. 224 стр.
3. ***Հարությունյան Ս.,*** Երկրաչափություն, մաս առաջին, Երևան, «Աստղիկ» գրատուն, 2010թ., 484 էջ:

ԵՐՐՈՐԴ ՈՏՆԱԿԱՅԻՆ ՔԱՌԱՆԿՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ավագ Տոլեմակի Կոստանյան
Հայկական ատոմակայան

Ամփոփում: Նախորդ հոդվածում ապացուցվել է, որ կամայական ուռուցիկ քառանկյան ներքին տիրույթի ցանկացած կետի նկատմամբ չորրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է սկզբնականին: Սույն աշխատանքում քննարկվում է հետևյալ խնդիրը՝ գոյություն ունի՞ արդյոք կամայական ուռուցիկ քառանկյան ներքին տիրույթի կետ, որի նկատմամբ երրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է սկզբնականին: Պատասխանը դրական է: Ապացուցված է, որ կամայական ABCD ուռուցիկ քառանկյան ներքին տիրույթում գոյություն ունի O կետ, որի նկատմամբ երրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է ABCD-ին: Հոդվածի երկրորդ մասում այդ արդյունքը կիրառված է կիսականոնավոր սեղանների դասի դեպքում: Նախ ապացուցված է, որ կիսականոնավոր սեղանների անկյունագծերի միջնակետերի նկատմամբ առաջին, երկրորդ, երրորդ ոտնակային քառանկյունները նման են սկզբնականին: Դրանից հետո ապացուցվել է, որ ABCD կիսականոնավոր սեղանի հիմքի միջնուղղահայացի վրա գոյություն ունի O կետ, որի նկատմամբ երկրորդ ոտնակային քառանկյունը քառակուսի է:

Բանալի բառեր: ոտնակային եռանկյուն, նմանություն:

ABOUT THIRD PEDAL QUADRANGLE

Avag Telmaky Kostanyan
Armenian atomic station

Summary. It was proved in previous article that with respect of any point in the interior of any convex quadrangle the fourth pedal quadrangle is similar to the initial quadrangle. In the present work the following problem is discussed. Is there a point in the interior of any convex quadrangle such that the third pedal quadrangle with respect of this point is similar to the initial quadrangle? The answer is positive. It is established, that there is a point O in the interior of any convex quadrangle ABCD such that the third pedal quadrangle is similar to ABCD. In the second part of the present article, this result is applied for the class of semi canonical trapeziums. First, it is proved that the first, second, third pedal quadrangles with respect of midpoints of diagonals of semi canonical trapeziums are similar to the initial trapezium. Then it is established, that there is a point O on the middle perpendicular of the base of semi canonical trapezium ABCD such that the second pedal quadrangle with respect of this point is a square**.**

Key words: pedal quadrangle, similarity, pedal triangle.

О ТРЕТЬЕМ ПЕДАЛЬНОМ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКЕ

Аваг Тельмакович Костанян
Армянская атомная станция

Резюме. В предыдущей статье было установлено, что четвертый педальный четырехугольник по отношению к любой внутренней точке произвольного выпуклого четырехугольника подобен исходному. В настоящей работе обсуждается следующая задача: существует ли точка внутренней области произвольного выпуклого четырехугольника, по отношению к которой третий педальный четырехугольник подобен исходному? Ответ положительный. Доказано, что во внутренней области произвольного выпуклого четырехугольника ABCD существует точка O, по отношению к которой третий педальный четырехугольник подобен ABCD. Во второй части статьи этот результат применяется для класса полуканонических трапеций. Вначале доказывается, что первый, второй, третий канонический четырехугольник по отношению к серединам диагоналей полуканонической трапеции подобен исходной трапеции. После этого доказывается, что на серединном перпендикуляре основания полуканонической трапеции ABCD существуетвует точка O, по отношению к которой вторым педальным четырехугольником является квадрат.

Ключевые слова: педальный трехугольник, подобие, педальный треугольник..

Получено в редакцию - 10.09.2024
Рецензирована – 06.12.2024
Отправлен на сайт – 12.04.2025