

ԿՈՌՐԻՆԱՏԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴԸ ԵՐԿՐԱԶՉԱՓԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Պետրոսյան Լեոնիկ Նահապետի

ORCID 0000-0002-9587-1428

ՀԱՊՀ Կապանի մասնաճյուղ



Պետրոսյան Լ. Ն., մանկավարժական
գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր

Ներածություն

Երկրաչափության մեջ կիրառվում են խնդիրների լուծման տարբեր մեթոդներ. **համադրական (մաքուր երկրաչափական), ձևափոխությունների, վեկտորական, կոորդինատային** և այլն: Դպրոցական դասընթացում նրանք զբաղեցնում են տարբեր դիրքեր: Ավանդաբար, հիմնական մեթոդ համարվում է համադրականը, իսկ մյուսներից՝ առավել բարձր դիրք է զբաղում կոորդինատային մեթոդը, քանզի այն խիստ կապված է հանրահաշվի հետ: Համադրական մեթոդի նրբագեղությանը կարելի է հասնել ինտուիցիայի, կռահման, լրացուցիչ կառուցումների օգնությամբ: Կոորդինատային մեթոդը դրանք խստորեն չի պահանջում. խնդիրների լուծումը մեծամասամբ հաշվեկարգված (ալգորիթացված) է, որը շատ դեպքերում պարզեցնում է խնդրի լուծման որոնումը և դրա լուծումը: Կարելի է վստահորեն ասել, որ տվյալ մեթոդի ուսումնասիրումը երկրաչափության դպրոցական դասընթացի անբաժանելի մասը է:

Սակայն չի կարելի մոռանալ, որ կոորդինատային մեթոդով խնդիրներ լուծելիս անհրաժեշտ են հանրահաշվական հաշվարկների կիրառման պահանջվող հմտություններ և կարծես պետք չէ դատողականության բարձր աստիճան: Այս մտածելակերպը իր հերթին կարող է բացասաբար ազդել սովորողների ստեղծագործական ունակությունների զարգացման վրա: Այդ պատճառով անհրաժեշտ է կոորդինատային մեթոդի ուսումնասիրման և օգտագործման այնպիսի

մեթոդիկա, որը թույլ կտա դպրոցականներին սովորելու կոորդինատային մեթոդով լուծել տարբեր, երբեմն նաև սովորողներին համեմատաբար քիչ ծանոթ, ավելի բարդ, խնդիրներ: Պատահական չէ, որ շատ երկրաչափական խնդիրներ, որոնց լուծումը համադրական մեթոդով շատ դժվար է, կոորդինատային մեթոդով դրանց լուծումը ստացվում է ավելի պարզ ու նրբագեղ:

Հողվածի հիմնական բովանդակությունը

Երկրաչափության զարգացման մեջ մեծ դեր է խաղացել հանրահաշվի կիրառումը երկրաչափական կառույցների ուսումնասիրման գործում, որի հիմքի վրա հետագայում որպես մաթեմատիկայի առանձին ճյուղ՝ ձևավորվեց անալիտիկ երկրաչափությունը:

Անալիտիկ երկրաչափության առաջացումը կապված է նրա, հիմնական գործիք հանդիսացող, կոորդինատային մեթոդի հայտնագործման հետ: Կոորդինատային մեթոդը, բացի հարթության մեջ տրված օբյեկտներին առնչվող մի շարք խնդիրների լուծման նպատակահարմարությունից, հանդիսանում է նաև տարածական օբյեկտների միջև ցանկացած հեռավորությունների և անկյունների որոշման բավականին արդյունավետ մեթոդ:

Կոորդինատային մեթոդով այս կամ այն մաթեմատիկական կամ ֆիզիկական խնդիրներ լուծելիս կարելի է օգտագործել տարբեր կոորդինատային համակարգեր՝ դրանցից ընտրելով այն, որում խնդիրը, կոնկրետ տվյալ դեպքում, լուծվում է հարմար ու հեշտ:

Գոյություն ունեն մի շարք կոորդինատային համակարգեր՝ ուղղանկյուն, բևեռային, պարաբոլային, կոնական, պրոյեկտիվ, գնդային, գլանային և այլն: Դրանցից առավել օտագործվողը ուղղանկյուն կամ, ինչպես ասում են, դեկարտյան կոորդինատային համակարգն է, որից էլ հիմնականում օգտվում են դպրոցական մաթեմատիկայում:

Երկրաչափության դպրոցական դասընթացում որոշակիորեն անդրադարձ կատարվում է կոորդինատային մեթոդին: Մասնավորապես նշենք հայ հեղինակներ Ս. Է. Հակոբյանի ([2, էջ 77-84]) հեղինակած հանրակրթական ավագ դպրոցի ընդհանուր և հումանիտար հոսքի 11-րդ դասարանի և Լ. Ս. Աթանեսյան և ուրիշներ ([1, էջ 53-64]) հանրակրթական ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 11-րդ դասարանի դասագիրքերը, ինչպես նաև ռուս հեղինակներ Ա. Վ. Պոգորելովի [3, էջ 120-132] և Ի. Ֆ. Շարիգինի [5, էջ 396-410] դասագրքերը:

Նշված դասագրքերը, լուսաբանելով կոորդինատային մեթոդի էությունը և սովորողներին որոշակիորեն ծանոթացնելով նրա հիմնական հասկացություններին ու օգտագործվող բանաձևերին, այնուամենայնիվ չեն լուսաբանում և ուսուցանում այն հիմնական մեթոդները, որոնք օգտագործվում են այդ մեթոդով երկրաչափական խնդիրները լուծելիս:

Սովորաբար կոորդինատային մեթոդով խնդիրների լուծումը տեղի է ունենում ըստ հաշվեկարգի, որն իր հերթին ավելի դյուրին է դարձնում խնդրի լուծման որոնումը կամ կռահումը և դրա լուծումը: Տվյալ մեթոդը դեպի երկրաչափություն է տեղափոխում հանրահաշվի կարևոր առանձնահատկություններից մեկը՝ այս կամ այն խնդրի լուծման եղանակների միաձևությունը: Երկրաչափության խնդիրների լուծման նպատակով կոորդինատային մեթոդի կիրառումը ազատում է բարդ տարածական պատկերների ներկայացման անհրաժեշտությունից:

Որպես խնդիրների լուծման մեթոդի՝ կոորդինատային մեթոդի էությունը կայանում է նրանում, որ պատկերները տալով հավասարումներով և տաբեր երկրաչափական առնչությունները արտահայտելով կոորդինատներով՝ հնարավորություն է ստեղծվում երկրաչափական խնդիրը լուծել հանրահաշվական միջոցներով:

Կոորդինատային մեթոդը համընդհանուր մեթոդ է: Այն ապահովում է սերտ կապը հանրահաշվի և երկրաչափության միջև, որոնք միավորվելով տալիս են «հարուստ պտուղներ», ինչպիսին չէին կարող տալ՝ մնալով անջատված: Որոշ դեպքերում կոորդինատային մեթոդը

հնարավորություն է տալիս կառուցել ապացույցներ և ավելի ռացիոնալ լուծել խնդիրներ, որի դեպքում դրանք շատ ավելի գեղեցիկ ու նրբագեղ են, քան մաքուր երկրաչափական լուծումները:

Երկրաչափության խնդիրներում կոորդինատային մեթոդի կիրառումը որոշ դեպքերում կապված է մի երկրաչափական դժվարության հետ. միևնույն խնդիրը ստանում է տարբեր անալիտիկ ներկայացումներ՝ կախված այս կամ այն կոորդինատային համակարգի ընտրությունից: Եվ միայն բավարար փորձն է թույլ տալիս ընտրելու ավելի նպատակահարմար կոորդինատային համակարգ:

Այժմ որոշակիորեն անդրադառնանք կոորդինատային մեթոդով խնդիրների լուծման ավգորիթմին:

Այս մեթոդի օգնությամբ հիմնականում լուծվում են երկու տիպի խնդիրներ:

I. Օգտվելով կոորդինատային մեթոդից՝ երկրաչափորեն մեկնաբանել հավասարումները ու անհավասարությունները և դրանով իսկ երկրաչափությունը կիրառել հանրահաշվի և անալիզի նկատմամբ: Փունկցիայի գրաֆիկական պատկերումը կոորդինատային մեթոդի այդպիսի առաջին կիրառությունն է:

II. Պատկերները տալով հավասարումներով և կոորդինատներով արտահայտելով երկրաչափական առնչությունները՝ մենք հանրահաշիվը կիրառում ենք երկրաչափության նկատմամբ: Օրինակ, կարելի է կոորդինատներով արտահայտել հիմնական երկրաչափական մեծությունը՝ կետերի միջև եղած հեռավորությունը:

Կոորդինատային մեթոդով, ինչպես հանրահաշվական, այնպես էլ երկրաչափական խնդիրների լուծումը, ըստ էության հանգեցվում է **որոշակի ավգորիթմի** կատարման, որպես կանոն՝ բաղկացած հետևյալ քայլերից.

- Ելնելով կոորդինատների հարմարության նկատառումներից՝ խնդիրը բերել համապատասխան կոորդինատային (անալիտիկ) լեզվի:

- Կատարել անալիտիկ արտահայտության ձևափոխություն:

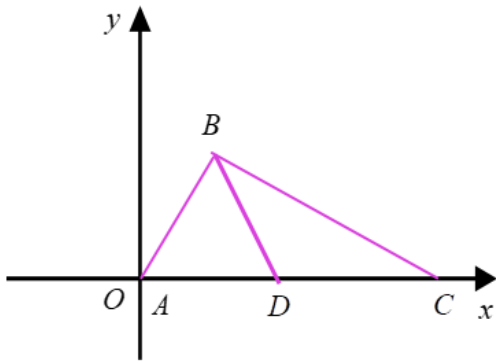
- Կատարել հակառակ անցում, այսինքն՝ կոորդինատական լեզվից անցնել այն լեզվին, որի տերմիններով ձևակերպվել էր խնդիրը:

Օրինակ 1: ABC եռանկյան մեջ. $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, BD -ն՝ միջնագիծն է: Ապացուցել,

$$\text{որ } BD^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}:$$

Քայլ առաջին: Կոորդինատային համակարգն ընտրենք այնպես, որ A կետը ծառայի կոորդինատների սկզբնակետ, իսկ AC ուղիղը՝ Ox առանցք (նկ. 1):

Կարևոր է օպտիմալ կերպով ընտրել կոորդինատական համակարգը, այսինքն՝ այնպես, որ առավել պարզ գտնվեն տրված կետերի կոորդինատները:



Ն.հ.

Ընտրված կոորդինատական համակարգում A , C և D կետերն ունեն հետևյալ կոորդինատները. $A(0,0)$, $D(b/2,0)$ և $C(b,0)$:

Քայլ երկրորդ: Նշանակենք B կետի կոորդինատները x -ով և y -ով: Այդ դեպքում օգտագործելով կոորդինատներով տրված երկու կետերի միջև եղած հեռավորության բանաձևը՝ կստանանք.

$$\begin{cases} c^2 = x^2 + y^2, \\ a^2 = (x-b)^2 + y^2 : \end{cases} \quad (1)$$

Այդ նույն բանաձևով՝

$$BD^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 : \quad (2)$$

Լուծելով (1) հավասարումների համակարգը՝ գտնում ենք x -ը և y -ը.

$$x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}; \quad y = \sqrt{c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2}} :$$

Ստացված արդյունքները տեղադրելով (2) բանաձևի մեջ՝ ստանում ենք.

$$BD^2 = \left(\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} - \frac{b}{2}\right)^2 + c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2} : \quad (3)$$

Ստացված արտահայտության մեջ կատարելով համապատասխան ձևափոխություններ՝ վերջնականապես ստանում ենք.

$$BD^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} : \quad (4)$$

Օրինակ 2: Տրված են երկու կետեր, որոնց հեռավորությունը հավասար է a : Գտնել կետերի բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի համար տրված երկու կետերից եղած հեռավորությունները հավասար են:

Քայլ առաջին: Նշանակենք կետերը A -ով և B -ով: Ներածենք ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը, որի սկզբնակետը A կետն է. (ձևավորվում է կոորդինատական օպտիմալ համակարգ ընտրելու կարողությունը): Այստեղից հետևում է, որ $AB = a$: Այդ դեպքում տվյալ կոորդինատական համակարգում կետերն ունեն հետևյալ կոորդինատները. $A(0,0)$ և $B(a,0)$: Նշանակենք կամայական կետ այնպես, որ տեղի ունենա հետևյալ պայմանը. $AM = MB$: M կետն ունի $M(x,y)$ կոորդինատները: Օգտագործելով այդ կետերի հեռավորության կոորդինատներով արտահայտված բանաձևը՝ ստանում ենք

$$AM^2 = x^2 + y^2, \quad MB^2 = (x-a)^2 + y^2 : \quad (5)$$

(5)-ի հաշվառմամբ, $AM = MB$ պայմանից ստանում ենք

$$x^2 + y^2 = (x-a)^2 + y^2, \quad (6)$$

Քայլ երկրորդ: Կատարելով ստացված (6) արտահայտության ձևափոխություններ՝ արդյունքում կստանանք. $x = a/2$:

Քայլ երրորդ: Կատարենք հակառակ ձևափոխություն հավասարման լեզվից երկրաչափական լեզու: Ստացված $x = a/2$ հավասարումն ուղղի հավասարում է, որն զուգահեռ է Oy առանցքին և կանգնած է A կետից $d = a/2$ հեռավորության վրա, այսինքն՝ հանդիսանում է AB հատվածի միջնուղղահայ:

Օրինակ 3: $A(4;1)$ և $B(11;8)$ կետերով տանել շրջանագիծ, որը շոշափում է Ox առանցքը:

Քայլ առաջին: Նախ նշենք, որ կենտրոնի $(a;b)$ կոորդինատներ և r ունեցող շրջանագծի հավասարումը հետևյալն է՝ ($[4, էջ 14]$)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2: \quad (7)$$

Ակնհայտ է, որ որոնվող շրջանագիծն ընկած է Ox առանցքից վերև և, քանի որ դրա հետ միասին այն շոշափում է Ox առանցքը, հետևաբար նրա կենտրոնի օրդինատը հավասար է շրջանագծի շառավղին՝ $b = r$: Այդ պատճառով որոնվող շրջանագծի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$(x-a)^2 + (y-r)^2 = r^2 \text{ կամ } (x-a)^2 + y^2 - 2ry = 0: \quad (8)$$

Քայլ երկրորդ: (8) Հավասարման մեջ հերթականորեն տեղադրելով A և B կետերի կոորդինատները՝ կստանանք հետևյալ հավասարումները՝

$$\begin{cases} (4-a)^2 + 1 - 2r = 0, \\ (11-a)^2 + 64 - 16r = 0: \end{cases} \quad (9)$$

(9)-ի լուծումից ստանում ենք՝ $a_1 = 7, a_2 = -1, b_1 = r_1 = 5, b_2 = r_2 = 13$:

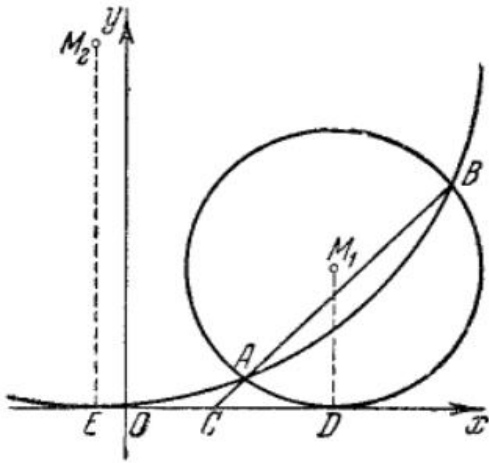
Քայլ երրորդ: Հետևաբար, գոյություն ունեն խնդրի պայմանին բավարարող

$$(x-7)^2 + (y-5)^2 = 25 \text{ և } (x+1)^2 + (y-13)^2 = 169 \quad (10)$$

հավասարումներով որոշվող երկու շրջանագծեր, որոնք ներկայացված են (նկ. 2) - ում:

Նշենք, որ առաջարկվող ալգորիթմով և վերը դիտարկված տիպի խնդիրներով կոորդինատային մեթոդը չի սահմանափակվում: Դպրոցում մաթեմատիկայի խորացված կամ նախասիրական ուսուցման դեպքում կան լայն սպեկտրի շատ ավելի հետաքրքիր, որոշակի առումով նաև ավելի բարդ խնդիրներ, որոնք լուծելիս անպայմանորեն չի ենթադրվում, որ պետք է կիրառել վերը բերված ալգորիթմը: Այս դեպքում կոորդինատային մեթոդի շրջանակներում կիրառվում են նաև այլ եղանակներ և օգտագործվում որոշ թեորեմներ: Այս առումով դիտարկենք մի շարք խնդիրներ, որոնց լուծման մեթոդները և ստացված արդյունքները էականորեն կհարստացնեն մաթեմատիկայով (առանձնապես երկրաչափությամբ) հետաքրքրվող սովորողների գիտելիքները և կնպաստեն նրանց հետաքրքրության մեծացմանը մաթեմատիկայի, մասնավորապես նաև երկրաչափության, նկատմամբ:

Դիցուք՝ հարթության վրա տրված է կոորդինատային համակարգը: Ասում են, որ M **բազմությունը տրված է** x, y անհայտներով **հավասարմամբ**, եթե այդ բազմությունը կազմված է միայն և միայն այն (x, y) կետերից, որոնց կոորդինատները բավարարում են տրված հավասարմանը: Դրանով իսկ, $f(x, y) = 0$ հավասարմանը համապատասխանեցվում է «նկար» կոորդինատային հարթության վրա:



1.

Օրինակ, եթե $f(x, y) = ax + by + c$ և այդ դեպքում a և b գործակիցները միաժամանակ հավասար չեն զրոյի, ապա $f(x, y) = 0$ հավասարումը տալիս է ուղիղ: Իրոք, եթե $b = 0$, ապա հավասարումը ձևափոխվում է $x = -\frac{c}{a}$ տեսքի և, դրանով իսկ, այն տալիս է ուղղաձիգ ուղիղ: Եթե $b \neq 0$, ապա այդ հավասարումը ձևափոխվում է $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ տեսքի, այսպիսով, նրանով տրված բազմությունն իրենից ներկայացնում է գծային ֆունկցիայի գրաֆիկ:

r շառավղով շրջանագծի հավասարումը, որի կենտրոնը $P(x_0, y_0)$ կետն է տրվում է հետևյալ

հավասարումով՝

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \text{ կամ } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0: \quad (11)$$

Իրոք, M կետն ընկած է r շառավղով $P(x_0, y_0)$ կենտրոնով շրջանագծի վրա միայն և միայն այն դեպքում, երբ M կետից միջև P կենտրոն հեռավորությունը հավասար է նրա շառավղին. $MP = r$:

Օգտագործելով հարթության վրա երկու կետերի հեռավորության բանաձևը, ստանում ենք հետևյալ հավասարումը՝

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r, \text{ կամ } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0: \quad (12)$$

$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ (որտեղ $a \neq 0$) տեսքի քառակուսային հավասարումները միշտ տալիս են կամ շրջանագիծ, կամ կետ, կամ էլ լուծում չունեն: Վերձենք, օրինակ, հետևյալ հավասարումը՝

$$2(x^2 + y^2) + 16x - 4y + d = 0: \quad (13)$$

Մի փոքր ձևափոխենք այս հավասարումը կատանանք.

$$x^2 + y^2 + 8x - 2y + \frac{d}{2}, \text{ կամ } x^2 + 8x + y^2 - 2y + \frac{d}{2} = 0: \quad (14)$$

(14) -ի որոշ ձևափոխությունից հետո ստանում ենք՝

$$(x^2 + 8x + 16) - 16 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + \frac{d}{2} = 0, \quad (15)$$

Ստացված հավասարումից քառակուսի անջատելով՝ վերնականապես կունենանք.

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 + \frac{d}{2} - 17 = 0: \quad (16)$$

(16) հավասարումից կարող ենք անել հետևյալն դատողությունները.

- $\frac{d}{2} - 17 < 0$ դեպքում ստացվում է շրջանագիծ, որի կենտրոնը $(-4; 1)$ կետն է,
- $\frac{d}{2} - 17 = 0$ դեպքում ունենք մեկ կետ այն է՝ $(-4; 1)$ կետը,

- $\frac{d}{2} - 17 > 0$ դեպքում կունենանք լուծումների դասարկ բազմություն:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ընդունված է $y = ax^2 + bx + c$ (որտեղ $a \neq 0$) քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկն անվանել պարաբոլ: Սակայն, եթե այդ գրաֆիկը շրջենք որևէ անկյունով կամ էլ արտապատկերենք ինչ-որ առանցքի նկատմամբ, ապա ստացված բազմությունը չի դադարի պարաբոլ լինելուց: Օրինակ, $x - y^2 = 0$ հավասարումը տալիս է պարաբոլ, որի առանցք համընկնում է Ox առանցքի հետ: Ավելի լավ է պարաբոլը սահմանել երկրաչափորեն (որպես տրված կետից և տրված ուղղից հավասարահեռ կետերի բազմություն):

Հաջորդ ակտումը ընդհանրապես դժվար չէ (փորձեք ապացուցել ինքնուրույն), սակայն կարևոր է, քանի որը ցույց է տալիս կապը բազմությունների նկատմամբ կատարվող ձևափոխությունների և հավասարումների նկատմամբ կատարվող ձևափոխությունների միջև:

Թեորեմ 1: Դիցուք՝ A բազմությունը տրված է $f(x, y) = 0$ հավասարմամբ, իսկ B բազմությունը՝ $g(x, y) = 0$ հավասարմամբ: Այդ դեպքում $f(x, y)g(x, y) = 0$ հավասարումը տալիս է այդ բազմությունների $A \cup B$ միավորումը, իսկ

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

համակարգը տալիս է դրանց հատումը:

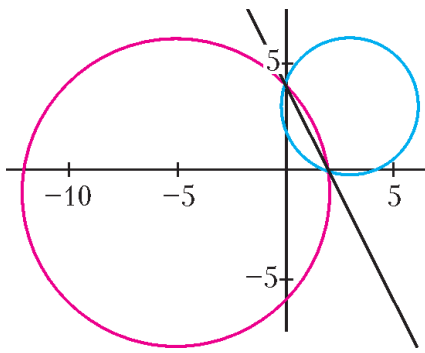
Որոշ մասնագետներ գտնում են, որ այս թեորեմը կարելի է անվանել «անալիտիկ երկրաչափության հիմնական թեորեմ»: Իրականում, աշխատելով բազմությունների հավասարումների հետ, հաճախ ենք օգտվում (նույնիսկ դա չնկատելով) թեորեմ 1-ից: Օրինակ, քանի որ $(x-1)^2 - 4y^2 = (x-1-2y)(x-1+2y)$, ապա $(x-1)^2 = 4y^2$ հավասարումը տալիս է $y = \frac{x-1}{2}$ և $y = -\frac{x-1}{2}$ ուղիղների (գույգի) միավորումը: Իսկ այդ ուղիղների հատումները 2 շառավղով և կորորինատների սկզբնակետում գտնվող կենտրոնով շրջանագծի հետ կարելի է գտնել լուծելով

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 4y^2, \\ x^2 + y^2 = 4: \end{cases} \quad (18)$$

համակարգը:

Ներկայացնենք թեորեմ 1-ի կիրառությամբ խնդիր, որի լուծումը բավական նրբագեղ է, առանց ավելորդ հաշվումների:

Խնդիր 1: Գտնել $O_1(3;3)$ կենտրոնով ու $r_1 = \sqrt{10}$ շառավղով և $O_2(-5;-1)$ կենտրոնով ու $r_2 = 5\sqrt{2}$ շառավղով շրջանագծերի հատման կետերով տարված ուղղի հավասարումը (նկ. 3):



Ն.Կ.

Փորձենք գնալ ստանդարտ ճանապարհով: Անհրաժեշտ է գրել տրված շրջանագծերից յուրաքանչյուրի հավասարումը, գտնել նրանց հատման կետերը, լուծել երկու փոփոխականով երկու հավասարումներով համակարգը, իսկ այնուհետև գրել գտնված կետերով անցնող ուղղի հավասարումը:

Գրենք տրված շրջանագծերի հավասարումները: Նրանցից առաջինը տրվում է հետևյալ հավասարմամբ՝

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 10,$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 10,$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0:$$

(19)

Երկրորդ շրջանագծի հավասարումը հետևյալն է՝

$$(x+5)^2 + (y+1)^2 = 50,$$

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = 50, \quad (20)$$

$$x^2 + y^2 + 10x + 2y - 24 = 0:$$

Այսպիսով, այդ շրջանագծերի հատման կետերի կոորդինատները հանդիսանում են հետևյալ համակարգի լուծումները՝

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0, \\ x^2 + y^2 + 10x + 2y - 24 = 0: \end{cases} \quad (21)$$

(21)-ի երկրորդ հավասարումից հանելով առաջինը և ստացված հավասարումը նորից (21)-ի առաջին հավասարման հետ գրելով՝ կստանանք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0, \\ 16x + 8y - 32 = 0: \end{cases}$$

կամ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0, \\ 2x + y - 4 = 0: \end{cases} \quad (22)$$

(22)-ի երկրորդ հավասարումից y -ը արտահայտելով x -ով՝ ստանում ենք՝ $y = 4 - 2x$: Այս արտահայտությունը, տեղադրելով համակարգի առաջին հավասարման մեջ, կստանանք այդ շրջանագծերի հատման կետերի արսցիսների համար հետևյալ հավասարումը՝

$$x^2 + (4 - 2x)^2 - 6x - 6(4 - 2x) + 8 = 0$$

կամ՝

$$5x^2 - 10x = 0, \quad (23)$$

որտեղից՝ $x = 0$; 2: Եթե $x = 0$, ապա $y = 4$, իսկ եթե $x = 2$, ապա $y = 0$,: Այսպիսով, շրջանագծերի հատման կետեր են հանդիսանում $A(0;4)$ և $B(2;0)$ կետերը: Հետևաբար, AB ուղղի $y = kx + b$ հավասարման մեջ կստանանք $k = -2$ և $b = 4$: Այսպիսով, որոնվող ուղիղը տրվում է հետևյալ հավասարմամբ՝

$$y = 4 - 2x: \quad (24)$$

Բայց կարծես մենք տեսել ենք այս հավասարումը: Այն ճիշտ և ճիշտ (22) համակարգի երկրորդ հավասարումն է: Հնարավոր է, հարկ չկա՞ր լուծելու այդ համակարգը: Փորձենք տրամաբանական տեսանկյունից վերլուծել կատարված գործողությունները: Ստացանք $2x + y - 4 = 0$ հավասարումը՝ որպես (21) համակարգի հետևանք: Նշանակում է, երկու բազմությունների (շրջանագծերի) բոլոր ընդհանուր կետերը, որոնք տրված են (21) համակարգի հավասարումներով, ընկած են այդ ուղղի վրա:

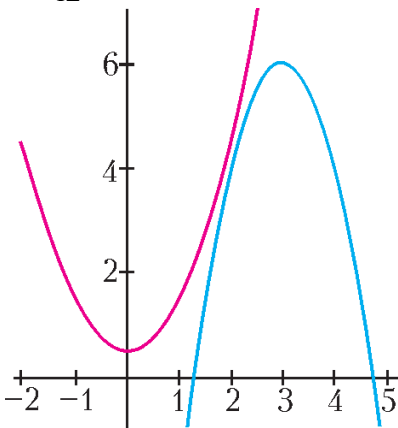
Փորձենք ընդհանրացնել պնդումները, որոնք օգտագործվել են բերված դատողություններում:

Թեորեմ 2: Դիցուք՝ A բազմությունը տրված է $f(x, y) = 0$ հավասարմամբ, իսկ B բազմությունը՝ $g(x, y) = 0$ հավասարմամբ: Եթե A և B բազմություններն ունեն ընդհանուր կետեր, ապա կամայական a և b թվերի համար $af(x, y) + bg(x, y) = 0$ հավասարումը տալիս է բազմություն, որն իր մեջ պարունակում է այդ բազմությունների հատման բոլոր կետերը:

Իրոք, դիցուք՝ $M(x_0; y_0)$ -ն A և B բազմությունների ինչոր ընդհանուր կետ է: Հետևաբար, $f(x_0, y_0) = 0$ և $g(x_0, y_0) = 0$, այդ պատճառով նաև $af(x_0, y_0) + bg(x_0, y_0) = 0$, որը և նշանակում է, որ M կետն ընկած է $af(x, y) + bg(x, y) = 0$ հավասարմամբ տրվող բազմության մեջ:

Խնդիր 2: Գտնել $y = x^2 + 1/2$ և $y = -2x^2 + 12x - 12$ պարաբոլները միմյանցից բաժանող ինչոր ուղղի հավասարում (նկ. 4):

Այս դեպքում բավական է գտնել ուղիղ, որը չի հատում տրված երկու պարաբոլներից և ոչ մեկը:



Իրոք, դիցուք երկու պարաբոլների հավասարումների ավագ գործակիցներն ունեն տարբեր նշաններ: Այդ դեպքում, եթե ուղիղը չի հատում այդ պարաբոլները ոչ մեկը, ապա այն անպայման բաժանում է նրանց, այսինքն՝ պարաբոլները դասավորվում են ուղղի տարբեր կողմերում (ապացուցեք այդ):

Նորից սկսենք խնդրի լուծման «ճակատային» ճանապարհից:

Կարելի է ստուգել, որ տրված պարաբոլները չեն հատվում:

Իրոք,

$$x^2 + \frac{1}{2} = -2x^2 + 12x - 12 \text{ կամ } 6x^2 - 24x + 25 = 0$$

հավասարումը, լուծում չունի, քանի որ հավասարման տարբերիչը՝

$$\mathbf{1.1.} \quad D = 576 - 600 = 24 < 0:$$

Մեզ անհրաժեշտ է գտնել $y = kx + b$ հավասարման գործակիցները, որի դեպքում այդ ուղիղը չի հատում տրված պարաբոլներից և ոչ մեկը: $kx + b = x^2 + \frac{1}{2}$ հավասարումը լուծումներին չի

խանգարում, եթե $k^2 + 4b - 2 < 0$, կամ $b < \frac{2 - k^2}{4}$: $kx + b = -2x^2 + 12x - 12$ հավասարումն ունի

լուծումներ, եթե $(k - 12)^2 - 8(b + 12) < 0$, կամ $b > \frac{1}{8}(k - 12)^2 - 12$:

$$\begin{cases} b < \frac{2-k^2}{4}, \\ b > \frac{1}{8}(k-12)^2 - 12 \end{cases} \quad (25)$$

Համակարգի ինչ որ լուծում գտնելու համար սկզբում բավարար է գտնել k -ն, որը համդիսանում է

$$\frac{1}{8}(k-12)^2 - 12 < \frac{2-k^2}{4}, \text{ կամ } (k-12)^2 - 96 < 4 - 2k^2, \text{ կամ } 3k^2 - 24k + 44 < 0$$

անահավասարության լուծում:

Այժմ փորձենք դատել այլ կերպ: Պարզ է, որ եթե

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

համակարգը լուծում չունի, որեմն լուծում չունի նաև

$$\begin{cases} f(x, y) + g(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{և} \quad \begin{cases} f(x, y) + g(x, y) = 0, \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

համակարգերից և ոչ մեկը: Եթե վերձենենք

$$f(x, y) = 2y - 2x^2 - 1 \quad \text{և} \quad g(x, y) = y + 2x^2 - 12x + 12,$$

ապա կունենանք

$$f(x, y) + g(x, y) = 3y - 12x + 11:$$

Այդ պատճառով

$$3y - 12x + 11 = 0 \quad \text{կամ} \quad y = 4x - \frac{11}{3} \quad (26)$$

հավասարմամբ տրված ուղիղը չի հատի տրված պարաբոլներից ոչ մեկը:

Թեորեմ 2-ին համանման ձևակերպենք թեորեմ 3-ը, որը համդիսանում է այն պնդման ընդհանրացումը, որի վրա հիմնված էր խնդիր 2-ի լուծումը:

Թեորեմ 3: Դիցուք՝ A բազմությունը տրված է $f(x, y) = 0$, իսկ B բազմությունը՝ $g(x, y) = 0$ հավասարմամբ: Եթե A և B բազմությունները ընդհանուր կետ չունեն, ապա գրոյից տարբեր կամայական a և b թվերի համար $af(x, y) + bg(x, y) = 0$ հավասարումը տալիս է բազմություն, որն ընդհանուր կետ չունի A և B բազմությունների հետ:

Ենթադրենք, թե $af(x, y) + bg(x, y) = 0$ հավասարմամբ տրված բազմությունն ունի ընդհանուր կետեր, օրինակ, A բազմության հետ: Նշանակենք (x_0, y_0) -ով այդպիսի կետերից մեկի կոորդինատները: Այդ դեպքում, քանի որ $f(x_0, y_0) = 0$ և $af(x_0, y_0) + bg(x_0, y_0) = 0$, ապա $bg(x_0, y_0) = 0$: Քանի որ ըստ պայմանի $b \neq 0$, հետևաբար $g(x_0, y_0) = 0$: Դրանով իսկ (x_0, y_0) կոորդինատներով կետն ընկած է B բազմությունում, որը հակասում է նրան, որ, ըստ պայմանի, A և B բազմություններն ընդհանուր կետ չունեն:

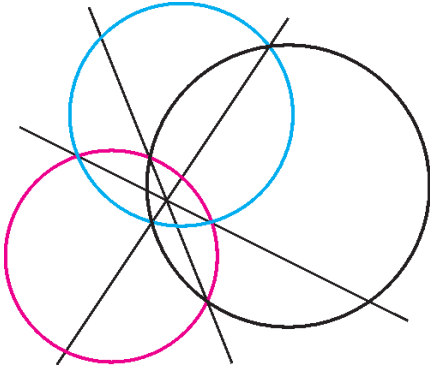
Փորձենք վերը դիտարկված գաղափարները կիրառել այսպես կոչված «ոչ հաշվարկային» լուծումներում:

Խնդիր 3: Դիցուք հարթության վրա տրված են երեք՝ զույգ առ զույգ հաստիղ, շրջանագծեր, որոնց կենտրոններն ընկած չեն մեկ ուղղի վրա: Այդ շրջանագծերից յուրաքանչյուր զույգի համար դիտարկենք

նրանց հաստման կետերով տարված ուղիղը (նկ. 5): Ապացուցե՛ր, որ այդ ուղիղներն անցնում են մեկ կետով:

Նշված շրջանագծերից յուրաքանչյուրը տրվում է $f_i(x, y) = 0$ հավասարմամբ, որտեղ

$$f_i(x, y) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2, \quad i = 1, 2, 3: \quad (27)$$



Ն.Կ. 5

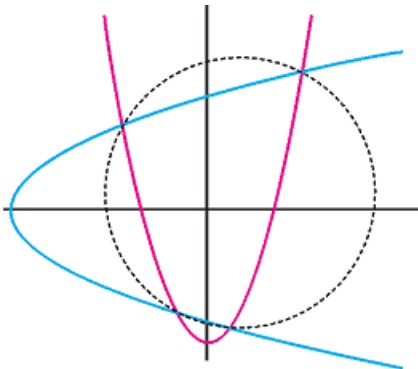
Ինչպես խնդրի 1-ի լուծման մեջ տեսանք, տրված շրջանագծերի հաստման կետերով անցնող ℓ_{12} , ℓ_{13} և ℓ_{23} ուղիղները տրվում են համապատասխանաբար $f_1(x, y) = f_2(x, y)$, $f_1(x, y) = f_3(x, y)$ և $f_3(x, y) = f_2(x, y)$ հավասարումներով:

Դիցուք՝ $M(x_0, y_0)$ -ն ℓ_{12} և ℓ_{13} ուղիղների (խնդրի պայմանից հետևում է, որ այդ ուղիղները զուգահեռ չեն) հաստման կետն է: Քանի որ $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0)$ և $f_1(x_0, y_0) = f_3(x_0, y_0)$, ուստի $f_2(x_0, y_0) = f_3(x_0, y_0)$: Այսպիսով, M կետն ընկած է նաև ℓ_{23} ուղիղ վրա, որը և նշանակում է, որ բոլոր այդ ուղիղներն անցնում են մեկ

կետով:

Ինչպես տեսնում ենք, դատողությունը բավականին նրբագեղ է:

Խնդիր 4: Դիտարկենք հարթության վրա գտնվող երկու պարաբոլներ, որոնք հաստվում են չորս կետերում: Ապացուցե՛ր, որ եթե պարաբոլների համաչափության առանցքներն փոխուղղահայաց են, ապա այդ պարաբոլների հաստման կետերն ընկած են մի շրջանագծի վրա (նկ. 6):



Ն.Կ.

Ներածենք կոորդինատների համակարգը՝ որպես առանցքներ վերցնելով տրված պարաբոլների համաչափության առանցքները: Կոորդինատների այդ համակարգում պարաբոլները տրվում են հետևյալ հավասարումներով՝

$$y = ax^2 + y_0 \quad \text{և} \quad x = by^2 + x_0: \quad (28)$$

(28)-ի հավասարումներից առաջինը բազմապատկելով b -ով, իսկ երկրորդը՝ a -ով և այնուհետև գումարելով ստացված հավասարումները՝ կստանանք՝

$$by + ax = ab(x^2 + y^2) + ax_0 + by_0$$

կամ

$$x^2 + y^2 - \frac{x}{b} - \frac{y}{a} + \frac{x_0}{b} + \frac{y_0}{a} = 0: \quad (29)$$

(29) հավասարումը տալիս է շրջանագիծ, որը, համաձայն թեորեմ 2-ի, անցնում է տրված պարաբոլների հաստման բոլոր կետերով:

Եզրակացություն

Վերոբերյալ դիտարկումը հիմք է տալիս եզրակացնելու, որ կոորդինատային մեթոդի օգնությամբ կարելի է անալիտիկ լուծմամբ, առանց ծավալուն գծագրական կառույցների ներկայացնել ամենատարբեր, այդ թվում նաև համեմատաբար դժվար երակրաչափական խնդիրների լուծումներ, որը մեծապես օգնում է հարստացնելու և ամբողջական դարձնելու

սովորողների գիտելիքները երկրաչափությունից, ինչպես նաև նպաստում է նրանց հետաքրքրության աճին «Երկրաչափություն» առարկայի նկատմամբ:

Կոորդինատային մեթոդով երկրաչափական խնդիրները ներկայացնելու և լուծելու համար անհրաժեշտ է մշակել համապատասխան մեթոդիկա կամ մեթոդական քայլեր:

Դպրոցի երկրաչափության դասընթացում (ինչպես նաև նախասիրական պարապմունքներում) կոորդինատային մեթոդի օգտագործման համար նախ անհրաժեշտ է առանձնացնել կորկրետ այն թեմաները, որտեղ կարելի է և անհրաժեշտ է ներառել այդ մեթոդի օգտագործումը:

Սույն հոդվածում ներկայացվեցին կոորդինատային մեթոդի կիրառությունները հարթության վրա դիտարկվող խնդիրներում: Միաժամանակ հարկ ենք համարում նշել, որ դրանով նշված մեթոդի կիրառությունները չեն սահմանափակվում: Կոորդինատային մեթոդն իր լայն կիրառություններն ունի նաև ստերեոմետրական (տարածաչափական) խնդիրներում, որին անդրադարձ չի կատարվել հոդվածի ծավալային նկատառումներից ելնելով:

Գրականության ցանկ

1. **Հակոբյան Ս. Է.:** Երկրաչափություն: Դասագիրք հանրակրթական ավագ դպրոցի ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի 11-րդ դասարանի համար: Եր.: Տիգրան Մեծ, 2010.- 136 էջ:
2. **Աթանեսյան Լ. Ս.,** Բուտոզով Վ. Ֆ. և այլք: Երկրաչափություն-11: Հանրակրթական ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 11-րդ դասարանի դասագիրք: Եր.: «Չանգակ», 2014.- 136 էջ:
3. **Погорелов А. В. Геометрия:** Учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений. - 5-е изд. - М: Просвещение, 1995. - 383 с.
4. **Смогоржевский А. С.** Метод КООРДИНАТ. Гос. издательство технико-теоретической литературы. Москва, 1952. - 40 с.
5. **Шарыгин И. Ф. Геометрия.** 7-9 кл.: Учеб. общеобразовательных. Дрофа, 2012.-462 с.

ԿՈՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴԸ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ Պետրոսյան Լեռնիկ Նահապետի

Անփոփում: Հոդվածում վեր են հանված կոորդինատային մեթոդով երկրաչափական խնդիրների լուծման հնարավորությունները: Երկրաչափության մեջ կոորդինատային մեթոդի էությունն այն է, որ անմիջականորեն կետերի կոորդինատներով երկրաչափական օբյեկտները տրվում են անալիտիկորեն՝ թվերի, հավասարումների, անհավասարումների կամ դրանց համակարգերի օգնությամբ, և դրանով իսկ օգտագործում են անալիտիկ մեթոդներ, թեորեմներ ապացուցելիս կամ երկրաչափական խնդիրներ լուծելիս : Դա էականորեն պարզեցնում է դասողությունները և հաճախ թույլ է տալիս, օգտվելով որոշակի հաշվեկարգից (ալգորիթմից), ապացուցել թեորեմներ կամ լուծել խնդիրներ, կատարել այս կամ այն հաշվարկները այն դեպքում, երբ ավանդաբար օգտագործվող գուտ երկրաչափական (համադրական) մեթոդը շատ դեպքերում պահանջում է արհեստական հնարքների կիրառում: Համընդհանուր ուսումնական գործողությունների տիրապետման պահանջը ներկայումս ներառված է նաև գործող կրթական չափորոշիչներում և օգտագործվող առարկայական ծրագրերում:

Երկրաչափական խնդիրներում կոորդինատային մեթոդի կիրառումը լայն հարավորություններ է բացում լուծելու դպրոցական երկրաչափության ավանդական դասընթացում գրեթե չդիտարկվող, սակայն իրենց օգտակարությամբ բավականին արժեքավոր խնդիրներ, որոնք մեծ հաջողությամբ կարելի է քննարկել մաթեմատիկայի խորացված ուսուցման հոսքերում կամ նախասիրական պարապմունքներում: Այս առումով, ներկայացված են կոնկրետ թեորեմներ և մի շարք ուսանելի խնդիրների օրինակներ, որոնք հիմնավորում են կոորդինատային մեթոդի կարևորությունը և կիրառման անհրաժեշտությունը հանրակրթական դպրոցում:

Բանալի բառեր: Կոորդինատային մեթոդ, երկրաչափական խնդիրներ, կոորդինատային համակարգ, հաշվեկարգ, բազմություն, թեորեմ:

МЕТОД КООРДИНАТ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Лерник Наапетович Петросян

НПУА Капанский филиал Аннотация

Резюме. В статье выявлены возможности решения геометрических задач методом координат. Сущность метода координат в геометрии заключается в том, что по непосредственным точкам координат геометрические объекты даются аналитически, т.е. посредством цифр, уравнений и неравенств или их систем и, тем самым, при доказательстве теорем или решении геометрических задач используются аналитические методы. Это существенно упрощает суждения и часто позволяет, пользуясь определенным алгоритмом, доказывать теоремы или решать задачи, делать те или иные расчеты в том случае, когда традиционно используемый собственно геометрический (сопоставительный) метод во многих случаях требует использование искусственных приемов. Требование владеть всеобщими учебными действиями в настоящее время включено также в действующие образовательные стандарты и используемые предметные программы.

Применение метода координат в решении геометрических задач открывает широкие возможности для решения задач, не включенных в традиционный курс школьной геометрии однако достаточно ценных своей полезностью, которые с большим успехом можно рассматривать в потоках с углубленным обучением математике или в любительских курсах. В этой связи представлены конкретные теоремы и ряд примеров учебных задач, которые обосновывают важность и необходимость применения метода координат в средней школе.

Ключевые слова. Метод координат, геометрические задачи, система координат, алгоритм, множество, теорема.

COORDINATE METHOD IN GEOMETRIC TASKS

Lernik Nahapet Petrosyan

NPUA Kapan branch

Summary: The article reveals the possibilities of solving geometric tasks by means of the coordinate method. The essence of the coordinate method in geometry is that, based on direct coordinate points, geometric objects are given analytically, i.e. by means of numbers, equations and inequalities or their systems, and thus, analytical methods are used to prove theorems or solve geometric tasks. This significantly simplifies judgments and often allows, using a certain algorithm, to prove theorems or solve tasks, make certain calculations in the case when the traditionally used geometric (comparative) method in many cases requires the use of artificial techniques. Currently the requirement to master general educational actions is also included in the current educational standards and used subject programs.

The use of the coordinate method in solving geometric tasks opens the wide opportunities for solving tasks not included in the traditional course of school geometry, but quite valuable in their usefulness, which can be considered to be of great success in groups with advanced training in mathematics or in amateur courses. In this regard particular theorems and a number of examples of study tasks are presented, substantiating the importance and necessity of applying the coordinate method in the secondary school.

Keywords: Coordinate method, geometric tasks, coordinate system, algorithm, multiplicity, theorem.

Получено в редакцию - 05.03.2025

Рецензирована – 07.05.2025

Отправлен на сайт – 12.06.2025