

ՈՍՏՆԱԿԱՅԻՆ ՔԱՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

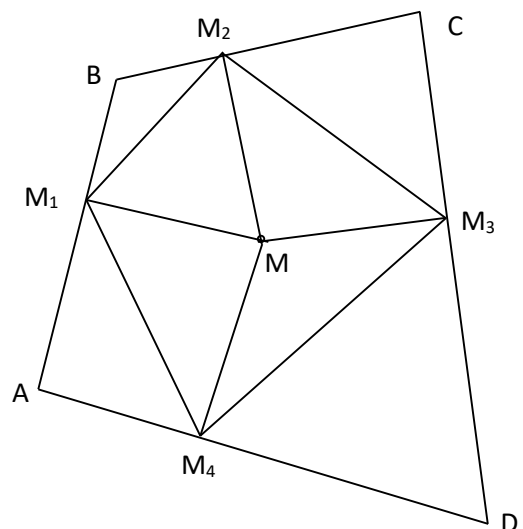
Կոստանյան Ավագ Տեղմանի

Հայկական ԱԵԿ



Կոստանյան Ս. ինժեներ

Մեր նախորդ աշխատանքներում ([1], [2]) ուսումնասիրվել են եռանկյան ոտնակային եռանկյունների երկրաչափության հետ կապված մի շարք խնդիրներ: Հայտնի է ([3], [4]), որ եռանկյան ներքին տիրույթի ցանկացած կետի երրորդ ոտնակային եռանկյունը նման է սկզբնական եռանկյանը: Այստեղից առաջանում է խնդիր. եռանկյան ներքին տիրույթում գտնել կետեր, որոնց առաջին ոտնակային եռանկյունը նման չէ սկզբնական եռանկյանը, իսկ երկրորդը նման է: Այդ խնդիրը մի շարք տարատեսակներով լուծվել է ([1], [2]) աշխատանքներում: Այս խնդրի մոտակա հարթաչափական հանգունակը համանման խնդիր է քառանկյան դեպքում: Հաշվի առնելով եռանկյան ուռուցիկությունը, բնական է սահմանափակվել միայն ուռուցիկ քառանկյունների դիտարկմամբ: Սույն աշխատանքի նպատակն է ներմուծել ուռուցիկ քառանկյան ոտնակային քառանկյունների հասկացությունը և ապացուցել երրորդ ոտնակային եռանկյան մասին թեորեմի հանգունակն այդպիսի քառանկյուններում:



Նկ. 1

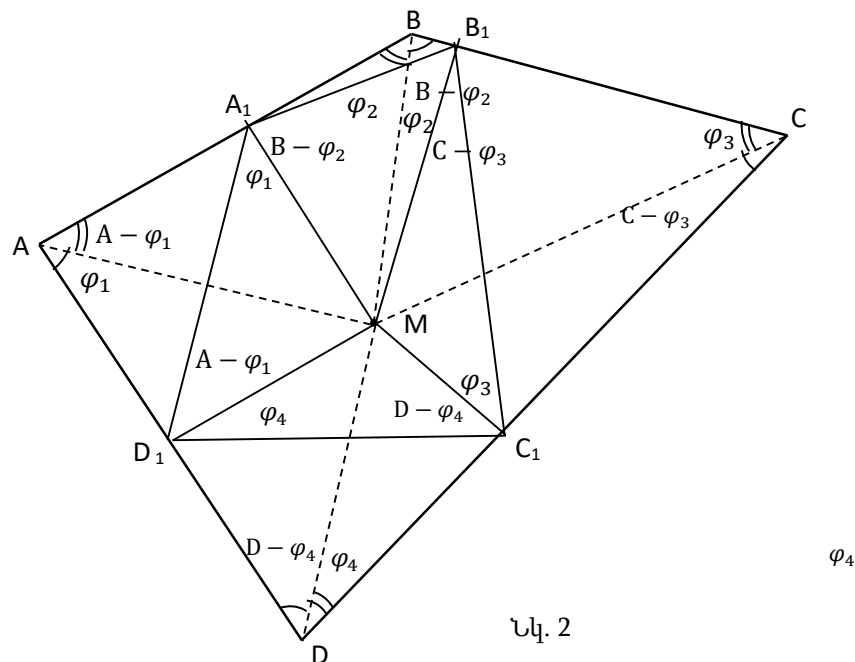
Դիցուք $ABCD$ -ն որևէ ուռուցիկ քառանկյուն է: Վերցնենք դրա ներքին տիրույթի որևէ M կետ, այդ կետից տանենք ուղղահայացներ քառանկյան կողմերին և դրանց M_1, M_2, M_3, M_4 , հիմքերը (գծ.1) հաջորդաբար միացնենք հատվածներով: Ստացված $M_1M_2M_3M_4$ քառանկյունը կոչվում է տրված քառանկյան առաջին ոտնակային քառանկյուն M կետի

նկատմամբ: Շարունակելով, կստանանք այդ քառանկյան երկրորդ, երրորդ, չորրորդ և այլն ոտնակային քառանկյունները: Սույն աշխատանքի նպատակն է ստանալ ոտնակային եռանկյունների մասին հիմնական թեորեմի հանգունակը ուռուցիկ քառանկյունների դեպքում:

Թեորեմ: Կամայական ABCD ուռուցիկ քառանկյան ներքին տիրույթի ցանկացած M կետի չորրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է ABCD-ին:

Ապացուցում: Վերցնենք կամայական ABCD ուռուցիկ քառանկյուն (նկ.2): Քառանկյան տիրույթի որևէ M կետում առաջին ոտնակային քառանկյունը կլինի $A_1B_1C_1D_1$ քառանկյունը: M կետը միացնենք ABCD քառանկյան գագաթներին և կատարենք նշանակումներ, ինչպես նշված է նկար 2-ում.

$$(\varphi_1; A - \varphi_1), (\varphi_2; B - \varphi_2), (\varphi_3; C - \varphi_3), (\varphi_4; D - \varphi_4)$$



Կունենանք հետևյալ պարզ արտահայտությունները՝

$$\angle A = (\varphi_1) + (A - \varphi_1), \quad \angle B = (\varphi_2) + (B - \varphi_2),$$

$$\angle C = (\varphi_3) + (C - \varphi_3), \quad \angle D = (\varphi_4) + (D - \varphi_4):$$

Առաջին ոտնակային քառանկյան անկյունները կլինեն՝

$$\angle A_1 = \varphi_1 + B - \varphi_2, \quad \angle B_1 = \varphi_2 + C - \varphi_3,$$

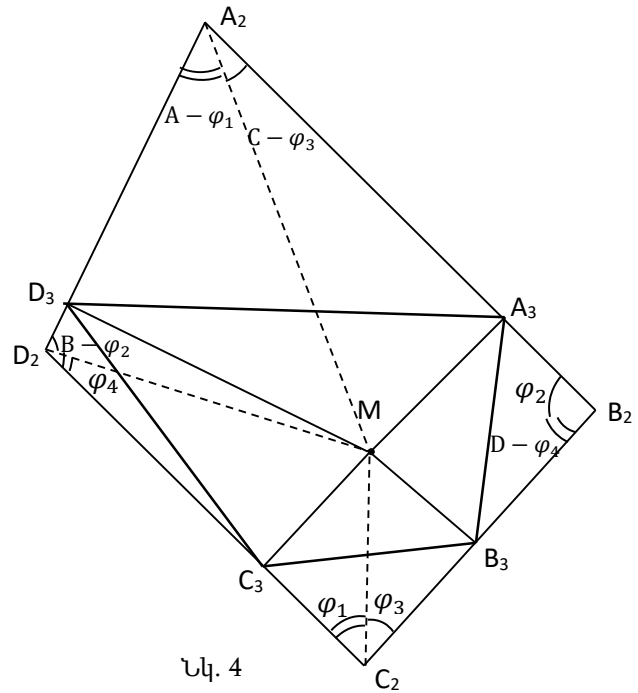
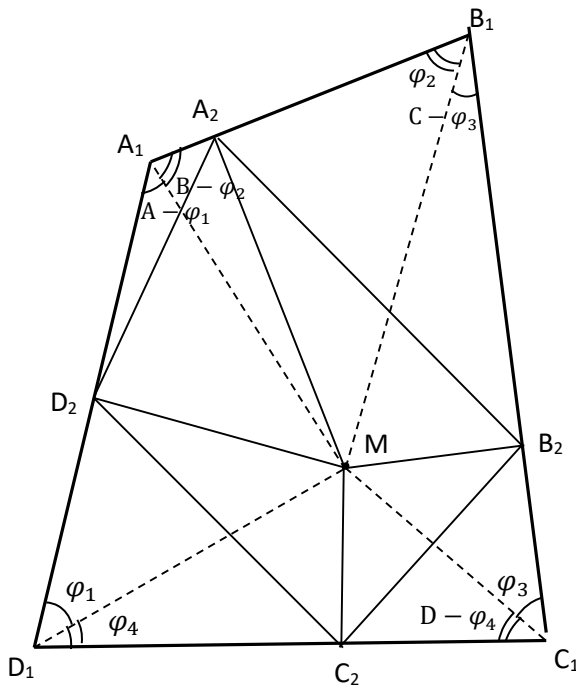
$$\angle C_1 = \varphi_3 + D - \varphi_4, \quad \angle D_1 = \varphi_4 + A - \varphi_1:$$

Համանման ձևով M կետից տանենք ուղղահայացներ $A_1B_1C_1D_1$ քառանկյան կողմերին, որոնց հիմքերը միացնելով կունենանք $A_2B_2C_2D_2$ երկրորդ ոտնակային քառանկյունը (նկ. 3). Ակնհայտ է, $A_2B_2C_2D_2$ քառանկյան անկյունները կլինեն՝

$$\angle A_2 = \varphi_1 + C - \varphi_3, \quad \angle B_2 = \varphi_2 + D - \varphi_4,$$

$$< C_2 = \varphi_3 + A - \varphi_1, \quad < D_2 = \varphi_4 + B - \varphi_2:$$

Կառուցենք երրորդ և չորրորդ ոտնակային քառանկյունները (նկ.4; 5):



$A_3B_3C_3D_3$ քառանկյան անկյուններն են՝
 $< A_3 = \varphi_1 + D - \varphi_4, \quad < B_3 = \varphi_2 + A - \varphi_1,$
 $< C_3 = B - \varphi_2 + \varphi_3, \quad < D_3 = \varphi_4 + C - \varphi_3:$

Այստեղից երևում է, որ

$$< A_4 = \varphi_1 + A - \varphi_1, \quad < A_4 = < A,$$

$$< B_4 = < B, \quad < C_4 = < C \quad \text{և} \quad < D_4 = < D, \quad \text{ուրեմն}$$

քառանկյուն $A_4B_4C_4D_4$ -ը (նկ. 5) նման է

քառանկյուն $ABCD$ -ին: Թեորեմն ապացուցված է:

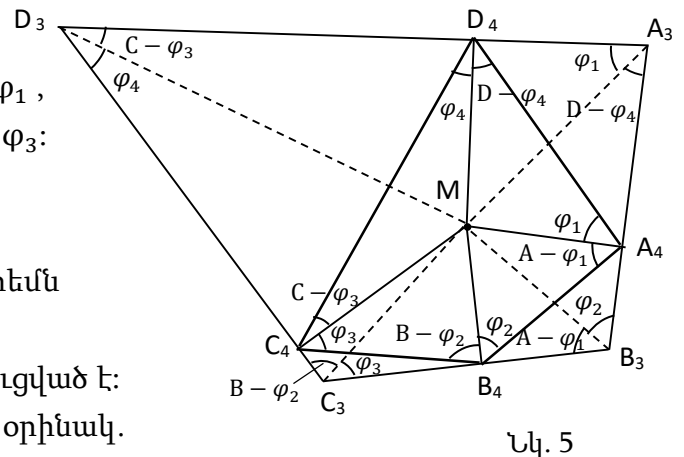
Դիտարկենք ոտնակային քառանկյան մի օրինակ.

Թեորեմ: Եթե $ABCD$ քառանկյան հարևան անկյունների մեծությունների

գումարը հավասար է 180° -ի, ապա այդ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետի նկատմամբ երկրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է $ABCD$ -ին:

Ապացուցում: Դիցուք $ABCD$ քառանկյան մեջ $< A + < B = 180^\circ$ -ի, բնականաբար կունենանք $< C + < D = 180^\circ$ -ի: Անկյունագծերով որոշվող անկյունների մեծությունները նշանակենք $(\varphi_1: A - \varphi_1), (\varphi_2: B - \varphi_2), (\varphi_3: C - \varphi_3)$ և $(\varphi_4: D - \varphi_4)$:

Հաշվելով երկրորդ ոտնակային քառանկյան անկյունների մեծությունները, կունենանք



$$A_2 = \varphi_1 + C - \varphi_3, \quad B_2 = \varphi_2 + D - \varphi_4, \quad C_2 = \varphi_3 + A - \varphi_1 \quad \text{և} \quad D_2 = \varphi_4 + B - \varphi_2:$$

Քանի որ ոտնակային կետը համընկնում է անկյունագծերի հատման կետին, ուստի $\varphi_1 + C - \varphi_3 = 180 - D$; $\varphi_3 + A - \varphi_1 = 180 - B$; $\varphi_2 + D - \varphi_4 = 180 - A$ իսկ $\varphi_4 + B - \varphi_2 = 180 - C$: Մյուս կողմից $180 - A = B$, իսկ $180 - B = A$ և $180 - D = C$, $180 - C = D$, ուրեմն $A_2 = D$; $B_2 = B$; $C_2 = A$; $D_2 = C$:

Հետևաբար $A_2B_2C_2D_2$ քառանկյունը նման է $ABCD$ քառանկյանը

Նման արդյունք կունենանք, եթե քառանկյան հանդիպակաձև անկյունների մեծությունների գումարը հավասար է 180° -ի:

Գրականություն

1. Կոստանյան Ա., Ոտնակային եռանկյան երկրաչափության մասին, «Մաթեմատիկան դպրոցում», 2011, թիվ 1(76):
2. Կոստանյան Ա., Եռանկյան որոշ նշանավոր կետերի առաջին և երկրորդ ոտնակային եռանկյունների նմանությամբ մասին, «Մաթեմատիկան դպրոցում», 2012, թիվ 2(83):
3. Кокстер Г.С.М., Грейтцер С.Л., Новые встречи с геометрией, Москва, “Наука“, 1978г. 224 стр.
4. Հարությունյան Ս., Երկրաչափություն, մաս 1, Երևան, «Աստղիկ» գրատուն, 2010, 484 էջ:

ՈՏՆԱԿԱՅԻՆ ՔԱՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Կոստանյան Ավագ Տեղմանի

Ամփոփում: Անցած դարի երկրորդ կեսին ներմուծվեց եռանկյան ներքին տիրույթի կամայական ներքին կետի նկատմամբ այդ եռանկյան ոտնակային եռանկյան հասկացությունը: Ապացուցվել է, որ այդ նույն կետի նկատմամբ երրորդ ոտնակային եռանկյունը նման է սկզբնականին: Այլ տեղեկություններ ոտնակային եռանկյան մասին չե եղել: Աշխատանքում մանրամասնորեն ուսումնասիրվում է ոտնակային եռանկյունների երկրաչափությունը, ստացվել են մի շարք հետաքրքիր արդյունքներ: Հետազոտության հաջորդ փուլում այդ հասկացությունը տարածվել է ուռուցիկ քառանկյունների ընտանիքի վրա: Ներկայացված հոդվածում ապացուցվել է եռանկյունների դեպքի հանգումակը՝ ուռուցիկ քառանկյան ցանկացած ներքին կետի նկատմամբ չորրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է սկզբնականին: Ապացուցված է նաև, որ եթե ուռուցիկ քառանկյան հարևան անկյունների մեծությունների գումարը 180° է, ապա այդ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետի նկատմամբ երկրորդ ոտնակային քառանկյունը նման է սկզբնականին: Ստացված արդյունքները լրացնում են քառանկյունների երկրաչափությունը և կլինեն հետաքրքիր հանրակրթական դպրոցների այն աշակերտների համար, որոնք հետաքրքրվում են երկրաչափությամբ, ինչպես նաև ուսուցիչների և մաթեմատիկայի այլ մասնագետների համար:

Բանալի բաներ. ուռուցիկ քառանկյուն, ուսնակային քառանկյուն, նմանություն, ուսնակային եռանկյուն

О ПЕДАЛЬНЫХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКАХ

Костанян Аваг Тельманович

Резюме. Во второй половине прошлого столетия было введено понятие педального треугольника по отношению к внутренней точке данного треугольника (Александр Оппенгейм). Было установлено, что третий педальный треугольник по отношению к любой точке плоскости треугольника подобен исходному. Это был единственный результат о педальных треугольниках. Мы изучили подробно геометрию различных педальных треугольников. Например, было доказано существование внутренней точки, по отношению к которой второй педальный треугольник подобен исходному. На данном этапе исследования результаты о треугольниках распространяются на случай четырехугольников. В данной статье доказан аналог теоремы Оппенгейма для четырехугольников: для любой внутренней точки выпуклого четырехугольника четвертый педальный четырехугольник по отношению к этой точке подобен исходному. Кроме того, доказывается, что если сумма величин соседних углов выпуклого четырехугольника равна 180° , то второй педальный четырехугольник по отношению к точке пересечения диагоналей этого четырехугольника подобен исходному. Полученные результаты будут интересны старшеклассникам, интересующимся геометрией, а также учителям и другим специалистам математики

Ключевые слова: выпуклый четырехугольник, педальный четырехугольник, подобие, педальный треугольник..

ABOUT PEDAL QUADRANGLES

Kostanyan Avag Telman

Summary. In the second half of the previous century the concept of the pedal triangle with respect of the interior point for the given triangle was introduced (Alexander Oppenheim). It was established that the third pedal triangle with respect of an arbitrary point is similar to the initial triangle. It was the unique result about pedal triangles. We studied in details the geometry of different pedal triangles. For example, it was proved the existence of the interior point such that the second pedal triangle with respect of the same point is similar to the initial triangle. In the present stage of this research, results about pedal triangle are disseminating for the case of quadrangles. In the present article, we prove the analogue of the Oppenheim's theorem for quadrangles: for any interior point of the convex quadrangle, the fourth pedal quadrangle with respect of this point is similar to the initial quadrangle. Besides, it is proved that if the sum of neighbor angles measures of the convex quadrangle is 180° , then the second pedal quadrangle with respect of the point of intersection of its diagonals is similar to the initial quadrangle. The results obtained will be of interest to high school students interested in geometry, as well as teachers and other mathematics specialists

Key words: convex quadrangle, pedal quadrangle, similarity, pedal triangle.