СОЧЕТАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КОНТЕКСТОВ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ КАК ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОСНОВА ПРЕОДОЛЕСНИЯ ФОРМАЛИЗМА В ИХ ИЗУЧЕНИИ

Миналто Вадим Сергеевич[1], Кузнецова Елена Павловна[2]
[1,2]БГПУ, Минск, Беларусь
[2]ORCID 0000-0003-2295-3067

Миналто В.С., магистрант

Кузнецова Е.П., к. п. н., доцент

Комплексные числа длительное время присутствовали в гимназическом образовании Российской империи, а затем – в программах общеобразовательных школ СССР; они до сих пор присутствуют в современном школьном математическом образовании некоторых стран постсоветского пространства. Качество изложения этого материала в учебниках и учебных пособиях, как и качество усвоения сведений о комплексных числах учащимися, практически всегда подвергались критике из-за обвинений в формализме. Рассмотрим подробнее историю этой проблемы и поиск путей её решения, в частности, при разработке содержания факультативных занятий для школ Республики Беларусь.

Во второй половине XX века в ходе реформы школьного математического образования Советского Союза, возглавляемой А. Н. Колмогоровым (1903–1987), материал о комплексных числах (из-за формального стиля его изложения) был перенесен из общеобразовательной учебной программы в программы факультативных курсов. Авторы новой программы 1967 года по математике для школ СССР пояснили свою позицию: «Сохранение темы «Комплексные числа» в том сокращенном объёме, в котором она представлена в программе (без геометрической интерпретации умножения, формулы Муавра и применения её к извлечению корней), мало целесообразно» [10, с. 7].

О формализме[1] изложения материала о комплексных числах в школьном курсе алгебры и, соответственно, поверхностном характере усвоения его обучающимися задолго (более 13 лет) до «колмогоровской реформы» математического образования писал, в частности, В. М. Брадис (1890–1975): «В мнимых числах они видят только математические символы, лишённые реального содержания» [5, с. 273]. Формальная подача информации порождала непонимание учащимися сути особенностей комплексного числа, делала невозможным осознанное восприятие ими глубоких математических идей, связанных с множеством комплексных чисел, и мешала формированию научного мировоззрения школьников.

В 90-ые годы XX века после развала Советского Союза тему «Комплексные числа» вернули в школьные программы по математике стран постсоветского пространства, но далеко не всех. В Республике Беларусь в те годы тема «Комплексные числа» входила в учебные программы для XI классов с углублённым уровнем изучения математики. Содержание этой темы из учебного пособия [2] К. О. Ананченко и Г. Н. Петровского позже было перенесено в экспериментальное учебное пособие [3] того же коллектива авторов для XII класса с углублённым уровнем изучения математики.

Эксперимент Национального института образования Республики Беларусь (НИО РБ) по апробации учебных пособий для школ с 12-летним сроком обучения длился с 1998 года по 2007 год. После выступления в 2008 году академика А. Н. Рубинова (на совещании по проекту декрета «Об отдельных вопросах общего среднего образования») было принято решение по возврату в школы Беларуси 11-летнего срока обучения. При этом был утверждён отказ от профильных классов и от классов с углублённым уровнем изучения отдельных предметов, но сохранены факультативные занятия по предметам. Выбор тематики факультативов до сих пор отчасти определяется вкусами учителей, но существенно ограничивается программами и материалами, предлагаемыми на сайте НИО РБ по рекомендациям Министерства образования (МО). С 2015 года в школы Беларуси официально вернулись профильные классы. Однако в современных учебных программах по

[1] Традиционное понимание понятия «формализм» связано с происхождением логики Аристотеля (384–322 гг. до н. э.) и работами И. Канта (1724–1804), который назвал такой вид логики «формальной». Тем самым он подчеркнул её ведущую особенность, поскольку логика Аристотеля «занимается анализом структуры высказываний и доказательств, обращая основное внимание на форму в отвлечении от содержания» [19, стр. 937].

математике тема «Комплексные числа» не появилась ни для базового уровня обучения в общеобразовательной школе, ни для повышенного – в профильных классах; нет такой темы и среди программ факультативных занятий, рекомендуемых НИО МО РБ.

В некоторых других странах постсоветского пространства (Азербайджан, Армения, Молдова, Россия, Туркменистан, Узбекистан) также произошел переход от включения темы «Комплексные числа» в общеобразовательную программу по математике (период советской школы) к адресации ее содержания только учащимся классов с повышенным или углублённым уровнем изучения предмета. Это объясняется признанием психолого-педагогических трудностей восприятия учащимися абстрактных понятий, связанных с комплексными числами, что и проявляется в формализме их усвоения многими обучающимися. Советские ученые-методисты, например, Г. В. Дорофеев [7], И. С. Соминский и Д. К. Фадеев [18], А. Я. Хинчин [20] обоснованно полагали, что осознанное овладение содержанием темы «Комплексные числа» доступно только учащимся с развитым мышлением и с достаточно высоким уровнем способности к абстрагированию. Эти ученые поддерживали мотивацию введения комплексных чисел в алгебраическом контексте через разъяснение проблемы разрешимости уравнения вида $x^2 + 1 = 0$, ссылаясь на возрастные особенности старшеклассников. Однако В. Н. Гордеенко, делясь опытом изучения темы «Комплексные числа и многочлены» на факультативных занятиях, пишет о том, что при обсуждении проблем, возникающих с решением такого уравнения «ученики не чувствуют необходимости во введении комплексных чисел. Отсутствие корней в уравнении $x^2 + 1 = 0$ воспринимается учениками так же, как и отсутствие корня у уравнения $x + 3 = x + 4$» [6, с. 34].

Проблема преодоления формализма при изложении содержания темы «Комплексные числа» является достаточно сложной и нерешенной до сих пор. Так П. Ю. Германович полагает, что «полностью преодолеть формальный характер изложения комплексных чисел в школе невозможно, так как связь новых чисел с конкретной действительностью не может быть вскрыта перед учащимися с той же простотой и убедительностью, как это было сделано на предшествующих этапах расширения понятия числа. Но всё же существенно ослабить чрезмерный формализм, присущий традиционному изучению комплексных чисел в школе, вполне возможно» [14, с. 42].

Несомненно, результативность и смысл присутствия темы «Комплексные числа» в учебных программах школьного курса математики или в программах факультативных занятий неразрывно связаны с поиском методических путей для преодоления формализма при обучении этому материалу (в частности, при его изложении) и создания условий для осознанного усвоения содержания темы современными школьниками.

Под формализмом в обучении будем понимать механическое заучивание учащимися материала темы, то есть усвоение лишь формы нового знания **без понимания его содержания**. Запоминание терминов, символов, формул, схем, графических изображений и других форм, в которых математические знания передаются обучающимся, при отсутствии проникновения в их суть, не может стать основой научного мировоззрения молодых людей и не способствует развитию их продуктивного мышления. В качестве основных причин формализма в обучении М. Н. Скаткин (1900–1991) называет: ● абстрактность изложения учебного материала вне связи с жизнью и практикой;
● недостаточную степень реализации дидактических принципов наглядности, сознательности и активности обучающихся [17].

В современной школе **предупреждение** и **преодоление формализма** в отдельных традиционных темах курса математики достигаются научно обоснованными методиками и продуманной системой дидактических подходов и приёмов, сложившихся в длительной практике обучения. Но в ряде довольно абстрактных тем, к которым относятся и «Комплексные числа», такие методики в теории и практике обучения школьников ещё не сложились.

При поиске теоретической основы реализации неформального обучения программному материалу проблемных тем по математике и для разработки критериев оценки эффективности методики обучения и дидактических средств по качеству его усвоения целесообразно использовать международный опыт тестирования школьников. Так, например, в аналитическом обосновании Международной программы по оценке образовательных достижений учащихся, известной по аббревиатуре PISA (*англ.* Programme for International Student Assessment), указано, что в оценке образовательных достижений конкретного учащегося по результатам изучения им курса школьной математики проверяется «способность индивидуума формулировать, применять и интерпретировать математику в разнообразных контекстах» [1, с. 65]. Соответственно, полагаем актуальным создание и применение специальных контекстов для понятия комплексного числа. При формировании и рассмотрении контекстов будем следовать определению, данному О. Н. Карневич: «Контекст объекта исследования – это среда, включающая этот объект и способствующая выявлению его свойств и отношений с другими объектами» [9, с. 79].

В современной дидактике обучение трактуется как взаимодействие того, кто учит, и того, кто учится. Использование в обучении деятельностного подхода предполагает направленность всех педагогических мер на организацию интенсивной, постоянно усложняющейся деятельности учащихся [8]. При её планировании учителю необходимо искать продуктивные подходы и средства обучения, в том числе разрабатывать дидактический материал, который будет способствовать неформальному усвоению сути новых объектов. Поэтому при изучении нового математического понятия, в частности комплексного числа, для лучшего понимания его природы учитель может и должен создавать соответствующую дидактическую среду для организации такой деятельности, например, в виде подготовительных предметных контекстов – алгебраического и/или геометрического содержания. Актуализируя связи комплексного числа (нового математического объекта) с известными учащимся понятиями алгебры и геометрии, можно сформировать полезное для его введения понятийное окружение. Активно действуя со старыми объектами в знакомой учебной среде, школьники смогут осознанно (неформально) воспринять и содержание нового объекта.

В статье [15] было обосновано, что одним из условий преодоления формализма при обучении новому понятию комплексного числа является возможность рассматривать наибольшее количество его связей с ранее изученными понятиями как внутри предмета, так и за его пределами. В этом направлении для неформального изложения материала темы «Комплексные числа» перспективно сочетание в нем многообразных контекстов алгебры и геометрии.

Какие же контексты нового понятия комплексного числа помогут учащимся неформально усваивать различные аспекты темы «Комплексные числа», свойства множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, алгебраическую форму записи комплексного числа и его геометрическую интерпретацию? В этой статье из множества алгебраических контекстов комплексного числа выделим тот, который связан с рассмотрением свойств числовых множеств, а из возможных геометрических контекстов – связанные с формированием понятия комплексной плоскости. Перед использованием этих контекстов учителю необходимо дать определение числа i, то есть привести историческую справку об обозначении числового выражения $\sqrt{-1}$ символом i, который называется мнимой единицей, причём $i^2 = -1$.

В 1545 г. итальянским математиком Дж. Кардано (1501–1576) при решении одной из задач были получены новые числа вида $a + \sqrt{-b}$ $(b > 0)$. Он посчитал их бесполезными и старался не употреблять в своих работах, полагая, что они не выражают результат измерения реального объекта. Споры о пользе «воображаемых» чисел, их трактовках и подходящей терминологии велись математиками разных стран на протяжении почти трех столетий.

Принятое и сейчас обозначение мнимой единицы в 1777 году предложил использовать швейцарский, немецкий и российский математик Л. Эйлер (1707–1783), взявший для этого первую букву латинского слова «imaginarius» – мнимый. Он опирался на введённый в 1637 году французским учёным Р. Декартом (1596–1650) термин «мнимые числа», которым назвали выражения вида $a + b\sqrt{-1}$, где a, b – действительные числа. Немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777–1855) в своих работах не разделял идею введения этого названия, как и всех предшествующих ему со времен Дж. Кардано терминов – «невозможные», «софистические», «воображаемые» числа (величины, количества). С психологических позиций К. Ф. Гаусс считал, что смыслы этих названий создают впечатление отсутствия таких чисел и приводят к мысли, что несуществующими числами нет смысла оперировать. Он полагал, что было бы более удачным, если бы числа 1, -1 и $\sqrt{-1}$ назывались «прямой», «обратной» и «побочной» единицами, тогда никакой мистики вокруг таких чисел не было бы. Фактически та же мысль о новых числах (задолго до К. Ф. Гаусса) звучит в словах другого немецкого математика Г. Лейбница (1646–1716): «Хотя их и называют мнимыми, но от этого они не перестают быть полезными и даже необходимыми для аналитического выражения реальных величин» [4, с. 3].

Современное название «комплексное число» (от латинского слова «complexus» – связь, сочетание) К. Ф. Гаусс ввёл в 1831 года в связи с созданием геометрической интерпретации необычных чисел. Новым термином он согласовал этимологический[2] смысл понятия мнимого числа с его природой, что в дальнейшем позволило избежать терминологических разногласий среди математиков.

Учитель может (после определения числа i и ознакомления с записью комплексного числа в виде $a + bi$) мотивировать рассмотрение контекстов нового понятия комплексного числа, используя приём «дидактический конфликт». Для этого можно «разбить аудиторию на разные группы по результатам ответа на один и тот же вопрос (проблему) с учётом возникающего в ходе обсуждения плюрализма мнений, то есть множества мнений. Естественно, учитель не должен сначала каким-либо образом выделять правильный ответ, он должен уметь держать интригу» [12, с. 77]. Продемонстрируем конкретное математического содержание для реализации этого приёма перед включением понятия комплексного числа в его алгебраические и геометрические контексты.

---

[2] «Этимологический» означает связанный с происхождением слова (термина) и установлением способа его образования от соответствующей производящей основы – какого-либо слова некоторого языка.

Учащимся сначала можно напомнить (сообщить) формулировки определения пифагоровой тройки чисел и теоремы, обратной теореме Пифагора, например, в следующем виде.

Определение. Пифагоровыми числами (пифагоровой тройкой) называется набор из трёх натуральных[3] чисел x, y, z удовлетворяющих соотношению Пифагора: $x^2 + y^2 = z^2$.

Теорема (*обратная теореме Пифагора*). Если квадрат длины одной стороны треугольника равен сумме квадратов длин двух других его сторон, то этот треугольник прямоугольный.

Затем учащимся можно предложить ответить на следующие два вопроса, выбрав вариант ответа (*а* или *б*) на каждый из них. В случае выбора ответа *б*) попросить школьников дать объяснение своей позиции.

Вопрос 1. Верно ли, что тройку чисел i, $2\sqrt{2}$, 3 можно назвать пифагоровой тройкой чисел?

Вопрос 2. Верно ли, что тройка чисел i, $2\sqrt{2}$, 3 удовлетворяет условию теоремы, обратной теореме Пифагора?

Варианты ответа на вопросы 1 и 2:

а) да, так как $i^2 + 3^2 = (2\sqrt{2})^2$ – верное числовое равенство; *б*) нет.

Предлагаем читателям этой статьи также выбрать свой вариант ответа на оба эти вопроса и, при необходимости, дать пояснения.

Создание алгебраических контекстов понятия комплексного числа при рассмотрении свойств числовых множеств учитель может реализовать, если предварительно систематизирует материал о свойствах множеств натуральных, целых, рациональных и действительных чисел, акцентируя и вводя идею последовательного расширения числовых множеств. Затем полезно рассмотреть таблицу 1, где в готовом виде отмечено наличие или отсутствие свойств нового числового множества $\mathbb{C}$ в сравнении со свойствами множества $\mathbb{R}$, и обсудить с учащимися новые факты, поясняя их в рамках идеи последовательного расширения числовых множеств и модификации их свойств.

Таблица 1 – Свойства числовых множеств $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Название свойства числового множества	Наличие свойства для числового множества	
	Действительных чисел ($\mathbb{R}$)	Комплексных чисел ($\mathbb{C}$)
Упорядоченность	+	–
Дискретность	–	–
Плотность	+	–
Полнота (непрерывность)	+	+
Изображение числа в виде точки	+	+
Место размещения точки, соответствующей числу	Координатная прямая *Ox*	Координатная плоскость *Oxy*

По таблице 1 видно, что одно из отличий рассматриваемых множеств состоит в том, что множество $\mathbb{R}$ упорядочено, а множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел не обладает свойством

[3] Пифагоровы числа могут определяться и как тройки целых чисел (см., например, https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/5357)

упорядоченности. Доказательство этого факта (от противного) возможно на примере сравнения пары чисел i и 0.

Из определения числа i через равенство $i^2 = -1$ очевидно, что $i \neq 0$.

Если допустить, что $i > 0$, то будет верным и соотношение $i \cdot i > 0$, значит, верно утверждение $-1 > 0$. Получено противоречие с известным отношением элементов из множества действительных чисел ($-1 < 0$), следовательно, допущение неверно.

Если же принять $i < 0$, то также будет верным соотношение $i \cdot i > 0$, которое снова приводит к неверному числовому неравенству $-1 > 0$, то есть к противоречию с известным фактом и, соответственно, к отрицанию принятого допущения.

Итак, мы доказали, что мнимую единицу нельзя сравнивать с нулём, то есть число i не больше и не меньше числа 0. Демонстрации конкретного примера нарушения свойства достаточно (метод контрпримера) для обоснования невыполнимости свойства в общем случае. Действительно, поскольку из-за допущения упорядоченности двух элементов i и 0 нового множества $\mathbb{C}$ следует нарушение известного числового неравенства между элементами множества $\mathbb{R}$, то можно утверждать отсутствие свойства упорядоченности для всех комплексных чисел, то есть для всех элементов множества $\mathbb{C}$.

Отсутствие таких свойств множества $\mathbb{C}$, как плотность и дискретность, аргументируется уже как следствие, поскольку их наличие невозможно без свойства упорядоченности. Именно с отсутствием упорядоченности множества $\mathbb{C}$ связан тот факт, что в математике не рассматриваются неравенства с комплексными переменными.

Вернёмся теперь к пояснению правильных ответов на вопросы 1 и 2, которые, конечно, оба отрицательные.

Легко пояснить ответ «нет» на вопрос 1, поскольку два числа из трёх заданных не являются элементами множества натуральных чисел, значит, по определению они не могут образовать пифагорову тройку.

Труднее обычно обосновать ответ «нет» на вопрос 2. Не все обращают внимание на то, что по формулировке теоремы заданные числа должны выражать длины отрезков (сторон треугольника), а значит, они могут быть положительными действительными числами, то есть быть больше нуля. Но уже было доказано существование между числами i и 0 единственного верного соотношения: $i \neq 0$.

При желании учитель может расширить таблицу 1, добавив в неё свойство замкнутости (незамкнутости) числовых множеств относительно результатов выполнения некоторой алгебраической операции. Подробные методические рекомендации по обсуждению этих (и других) свойств с учащимися на факультативных занятиях изложены в статье [15].

Создание геометрических контекстов понятия комплексного числа учитель также может начать реализовывать, рассматривая таблицу 1.

Учащимся перед формированием понятия комплексной плоскости, кроме определения мнимой единицы, следует сообщить сведения, необходимые для создания геометрических контекстов: 1) комплексное число принято обозначать строчной буквой z латинского алфавита; 2) конструктивное определение комплексного числа как суммы действительного числа и чисто мнимого числа. Таким образом, комплексное число имеет вид $z = a + bi$, где a – действительное число, bi – чисто мнимое число.

По информации, полученной из таблицы 1, у учащихся могут возникнуть вопросы, касающиеся наглядной интерпретации новых чисел в виде точек: «Почему для изображения комплексных чисел точками необходима координатная плоскость?», «Почему для этого недостаточно точек одной координатной прямой?».

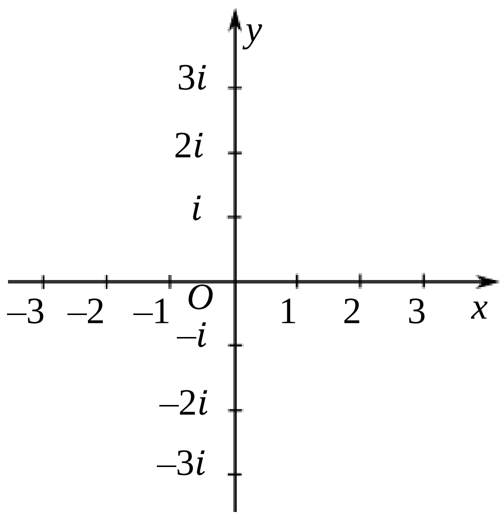

Рис. 1. Изображение комплексной плоскости

Учитель может пояснить по рисунку 1, что изображают комплексную плоскость так же, как и координатную плоскость Oxy с помощью пересекающихся координатных прямых Ox и Oy. Все комплексные числа нельзя изобразить точками одной координатной прямой Ox, ведь она уже занята точками, соответствующими изображениям действительных чисел, которые являются частным случаем комплексных, то есть образуют подмножество множества комплексных чисел. В таблице 1 отмечено, что множество $\mathbb{R}$ обладает свойством полноты (непрерывности) и для, например, чисто мнимых чисел, образно говоря, на координатной прямой Ox уже нет мест (точек). Возникает необходимость ввести, кроме числовой оси для множества действительных чисел $\mathbb{R}$ (действительной оси), изображаемой координатной прямой Ox, еще одну числовую ось – для множества чисто мнимых чисел вида bi. Это множество изображают (рис. 1) точками координатной прямой Oy, которую называют мнимой осью или множеством всех чисто мнимых чисел (оно равномощно множеству $\mathbb{R}$). В совокупности две числовые оси – действительная и мнимая – определяют комплексную плоскость.

Через геометрическую интерпретацию множества всех комплексных чисел на изображении комплексной плоскости Oxy учащимся зрительно становится понятнее неупорядоченность множества $\mathbb{C}$, то есть отсутствие для комплексных чисел отношений «меньше», «больше» (которые для действительных чисел связаны с расположениями «левее» и «правее» точек координатной прямой Ox).

Однако учителю сразу необходимо пресечь возникающую у учащихся аналогию действительной оси с мнимой, изображаемых соответственно координатными осями Ox и Oy. Для точек мнимой координатной прямой Oy нельзя, например, сказать: «Так как точка мнимой оси, соответствующая числу $3i$, расположена на её изображении выше точки, соответствующей числу $2i$, то имеем неравенство $3i > 2i$». Полученное неравенство равносильно утверждению $3i - 2i > 0$, то есть $i > 0$. Последнее утверждение неверно, поскольку было обосновано, что мнимую единицу нельзя сравнивать с числом нуль. Её нельзя сравнивать и ни с каким другим числом, поскольку для элементов множества $\mathbb{C}$ не выполняется свойство упорядоченности[4].

[4] Однако, если воспринимать комплексные числа как просто записи, то их можно упорядочивать лексикографически (от греческих слов *lexikon* - словарь, и *grapho* - пишу), наподобие установления порядка в последовательности слов в словаре (по алфавиту). Такой лексикографический порядок используется, например, в программировании, когда требуется упорядочить массив комплексных чисел. При расположении комплексных чисел в некоторую последовательность, например, полагают, если $a < c$,то число $a + bi$ надо записывать до числа $c + di$. В случае, если $a = c$ и $b < d$, то число $a + bi$ также надо поставить перед числом $c + di$.

Опыт советских педагогов-практиков, а также исследования Ю. В. Котовой [11], Э. А. Лаудыни [12] и О. П. Шаровой [21] подтвердили, что обоснование введения понятия комплексного числа становится доступнее, когда учитель использует не только некоторый алгебраический контекст, например, сведения о разрешимости уравнений, но и различные геометрические представления учащихся. Рассмотрение геометрической интерпретации комплексного числа в общеобразовательной учебной программе по математике для советской школы долгое время не было предусмотрено, а в современных учебных пособиях её использование явно недостаточно. Представляется актуальным поиск и/или конструирование методических подходов к введению комплексных чисел именно в геометрических контекстах, как наглядных и дающих возможности формирования более полных представлений учащихся о множестве комплексных чисел.

Опишем суть двух этапов реализации в обучении одного из возможных геометрических подходов при мотивации введения понятия комплексного числа.

*Этап 1 (**подготовительный**)* подразумевает, что до введения понятия комплексного числа учащиеся должны:

– усвоить взаимно однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел (числовой прямой, то есть элементами множества $\mathbb{R}$) и множеством всех точек некоторой координатной прямой (например, координатной прямой Ox, то есть всеми точками оси абсцисс);

– понимать, видеть и уметь интерпретировать любое действительное число t как алгебраический (арифметический, аналитический) эквивалент его геометрического образа – точки координатной прямой с координатой t, расстояние от которой до начала отсчёта точки $O\ (0)$ равно $|t|$, и наоборот.

*Этап 2 (**мотивационный**)* подразумевает сначала использование знания учащихся о том, что геометрическому образу – каждой точке координатной плоскости – соответствует единственный алгебраический эквивалент – упорядоченная пара чисел, которая определяет положение точки, – и наоборот. То есть фиксируется взаимно однозначное соответствие между множеством алгебраических объектов в виде всех упорядоченных пар действительных чисел и множеством геометрических объектов в виде всех точек координатной плоскости Oxy.

Затем учитель подводит учащихся к ответу на вопрос: «Есть ли такой математический (но не геометрический) объект, с помощью которого можно было бы, не изображая точки и систему координат на плоскости, иметь возможность производить какие-то математические действия (операции) над точками?». В качестве ответа учителем предлагается алгебраическая форма записи комплексного числа. Из истории математики известно, что Л. Эйлер [16] сразу переходил от геометрического образа – точки с координатами $(a; b)$ – к комплексному числу, записанному в виде $z = a + bi$.

Как вариант еще одного геометрического контекста для рассмотрения действий над комплексными числами могут быть векторы. Интерпретация комплексного числа $z = a + bi$ как радиус-вектора с координатами $(a; b)$ дает возможность реализации внутрипредметных связей с действиями над векторами, а также многих межпредметных связей, например, с физикой и информатикой.

В диссертации Ю. В. Котовой [11] описан педагогический эксперимент по апробации методики изучения геометрических приложений комплексных чисел в классах с углублённым уровнем изучения математики. Результаты её экспериментальной работы подтвердили необходимость целенаправленного выявления геометрического смысла всех понятий в процессе изучения комплексных чисел. Чтобы у учащихся к концу изучения соответствующей теории было сформировано умение переводить математические факты с геометрического языка на язык двух алгебраических форм записи комплексных чисел (с учётом тригонометрической) и обратно, требуется систематическое выполнение соответствующих упражнений. Иными словами, нужны задания, связанные с «переводом» фактов с одного математического языка на другой. Для реализации сочетания алгебраического и геометрического контекстов при формировании понятия комплексного числа в практических заданиях должны быть максимально использованы действия над комплексными числами в разных формах записи (алгебраической и тригонометрической), а также знания их трактовок на «геометрическом языке». В этом случае в ходе обучения перед учащимися будут раскрываться все сущностные характеристики понятия комплексного числа.

В 1799 году датско-норвежский математик К. Вессель (1745–1818) ввёл в связи с комплексным числом понятие направляющего отрезка (в современной терминологии – радиус-вектора), один конец которого точка O – начало системы координат, а другой – точка комплексной плоскости, соответствующая данному комплексному числу. Он же доказал, что умножение числа i на комплексное число поворачивает соответствующий ему направляющий отрезок на 90° против часовой стрелки вокруг начала координат [16].

Приведем рассуждение, поясняющее алгебраическую форму записи комплексного числа и основанное на трактовке действий над комплексными числами при переводе на «геометрический язык».

Результатом алгебраической операции умножения действительного числа b на мнимую единицу i является мнимое число bi; на рисунке 2 этот факт геометрически интерпретирован как результат поворота на +90° вокруг точки O радиус-вектора $\vec{b}$ с началом в точке O.

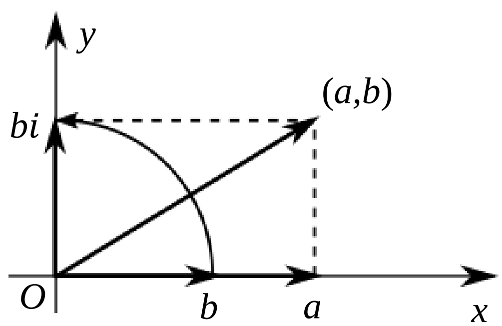

Рис. 2. Мнимое число $b\boldsymbol{i}$ на оси Oy как результат поворота; изображение комплексных чисел a, b, $b\boldsymbol{i}$, $a + bi$ радиус-векторами комплексной плоскости Oxy

При сложении двух чисел (действительного и чисто мнимого), а именно a и bi, появляется алгебраическая форма записи комплексного числа $a + bi$, которая в геометрическом контексте (рис. 2) связана с диагональю прямоугольника или с суммой двух радиус-векторов на осях комплексной плоскости Oxy.

Итак, в статье указаны алгебраические контексты понятия комплексного числа (свойства числового множества ℂ, разрешимость уравнений, тригонометрическая форма записи комплексного числа), а также некоторые его геометрические контексты (понятие комплексной плоскости, точки комплексной плоскости, радиус-векторы, геометрические преобразования). Отмечено влияние использования этих контекстов на качество усвоения учащимися знаний о комплексных числах. Введение понятий темы «Комплексные числа» через различные контексты алгебры и геометрии при обеспечении их разнообразных сочетаний имеет большой методический потенциал для разработки дидактических материалов, которые позволят создать условия для неформального усвоения содержания темы учащимися. Реализация контекстного изучения комплексных чисел в школе требует разработки научно обоснованной системы практических заданий и её апробации в учебном процессе.

Список литературы

1. ***PISA 2015*** Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy, PISA. – Paris: OECD Publishing, 2016. – 199 с.
2. ***Ананченко К.О.*** **(1997).** Алгебра и начала анализа : учеб. пособие / К. О. Ананченко, Г. Н. Петровский. – Минск : Нар. асвета, 1997. – 375 с.
3. ***Ананченко К.О.*** **(2005).** Алгебра и начала анализа : эксперим. учеб. / К. О. Ананченко, Г. Н. Петровский. – Минск : Нар. асвета, 2005. – 350 с.
4. ***Балк М.Б.*** **(1988).** Реальные применения мнимых чисел / М. Б. Балк, Г. Д. Балк, А. А. Полухин. — К. : Радянська школа, 1988. — 255 с.
5. ***Брадис В.М.*** **(1954).** Методика преподавания математики в средней школе : учеб. пособие / В. М. Брадис ; ред. А. И. Маркушевича. – 3-е изд. – М. : Учпедгиз, 1954. – 504 с.
6. ***Гордиенко В.Н.*** **(1981).** Об изучении темы «Комплексные числа и многочлены» на факультативных занятиях / В. Н. Гордиенко // Математика в шк. – 1981. – № 6. – С. 34.
7. ***Дорофеев Г.В.*** **(1999).** Математика для каждого / Г. В. Дорофеев ; предисл. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Аякс, 1999. – 292 с.
8. ***Загвязинский В.И.*** **(2001).** Теория обучения : Современная интерпретация: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. – М. : Издательский центр «Академия», 2001. – 192 с.
9. ***Карневич О.Н.*** **(2021).** Значимость контекста как общенаучного понятия / О. Н. Карневич // Математическое образование – 9 : сб. материалов Междунар. конф., Ереван, 7–8 окт. 2021 г. / Арм. гос. пед. ун-т ; редкол.: Г. С. Микаелян (отв. ред.) [и др.]. – Ереван, 2021. – С. 77–80.
10. ***Колмогоров А.Н.*** **(1967).** Проект программы средней школы по математике / А. Н. Колмогоров, А. И. Маркушевич, И. М. Яглом // Математика в шк. – 1967. – № 1. – С. 4–23.
11. ***Котова Ю.В*.** **(1996).** Методические особенности изучения геометрических приложений комплексных чисел в классах с углубленным изучением математики : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Ю. В. Котова. – М., 1996; 186 л..
12. ***Кузнецова Е.П.*** **(2021).** Приём «дидактический конфликт» и формирование математических понятий / Е. П. Кузнецова // Физико-математическое образование: цели, достижения и перспективы : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 25–26 нояб. 2021 г. / Белорус. гос. пед. ун-т; редкол.: А. Ф. Климович (отв. ред.) [и др.]. – Минск, 2021. – С. 77–80.

13. ***Лаудыня Э.А.*** **(1969).** Вопросы геометрии комплексных чисел в школе и подготовка учителя по этой теме : дис. … канд. пед. наук : 13.00.00 / Э. А. Лаудыня. – Ярославль, 1969. – 343 л.
14. Методика преподавания математики : пособие : в 2 ч. / С. Е. Ляпин [и др.]. – Л. : Учпедгиз, 1956. – Ч. 2. – 656 с.
15. ***Миналто В.С.*** **(2022).** Формирование научного мировоззрения и мотивации введения комплексных чисел при обобщении свойств числовых множеств на факультативных занятиях / В. С. Миналто, Е. П. Кузнецова // Матэматыка і фізіка. – 2022. – № 3. – С. 10–22.
16. ***Синкевич Г.И.*** **(2017).** История геометрических представлений комплексных чисел / Г. И. Синкевич // История науки и техники. – 2017. – № 4. – С. 15–30.
17. ***Скаткин М.Н.*** **(1945).** Формализм в знаниях учащихся и пути его преодоления / М. Н. Скаткин // Совет. педагогика. – 1945. – № 10. – С. 16–24.
18. ***Фадеев Д.К.*** **(1964).** Алгебра для самообразования / Д. К. Фадеев, И. С. Соминский. – 2-е изд. – М. : Наука, 1964. – 533 с.
19. ***Философия: энциклопедический словарь*** **(2004).** / под ред. А. А. Ивина.– М. : Гардакири, 2004. – 1072 с.
20. ***Хинчин А.Я.*** **(1963).** Педагогические статьи / А. Я. Хинчин ; под ред. Б. В. Гнеденко. – М. : Акад. пед. наук РСФСР, 1963. – 204 с.
21. ***Шарова О.П.*** **(1969).** Комплексные числа в курсе математики средней школы: дис. … канд. пед. наук : 13.00.00 / О. П. Шарова. – Ярославль, 1969. – 343 л.

ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԵՎ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԱՄԱՏԵՔՍՏԵՐԻ ՀԱՄԱԿՑՈՒՄԸ ՈՐՊԵՍ ՆՐԱՆՑ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ՖՈՐՄԱԼԻԶՄԸ ՀԱՂԹԱՀԱՐԵԼՈՒ ՏԵՍԱԿԱՆ ՀԻՄՔ

Մինալտո Վադիմ Սերգեևիչ, Կուզնեցովա Ելենա Պավլովնա

Ամփոփում: Հոդվածում ներկայացված են մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում կոմպլեքս թվերի վերաբերյալ նյութերի դիտարկման փուլերը՝ սկսած ԽՍՀՄ հանրակրթական դպրոցների ուսումնական ծրագրից հանելուց (ներկայացման ֆորմալիզմի պատճառով) մինչև հետխորհրդային մի շարք երկրներում մաթեմատիկայի խորացված կամ բարդեցված մակարդակների ուսուցմանը վերադառնալը: Որպես «Կոմպլեքս թվեր» թեմայի ոճ ձևական ուսուցման տեսական հիմք առաջարկվում է դիդակտիկական նյութերում հանրահաշվի և երկրաչափության համակցումը: Նկարագրված են դրվագներ կոմպլեքս թվերի հանրահաշվական և երկրաչափական համակցումների վերաբերյալ սովորողների ուսումնական գործունեության կազմակերպման մեթոդիկայի դրվագներ, ինչը թույլ կտա նրանց տիրապետելու թվային նոր՝ C բազմության հատկությունների (կարգավորվածություն, դիսկրետություն, խտություն, լրիվություն) էությունը: Երկրաչափական մոտեցման էությունը

բացահայտվում է երկրաչափական առարկաներից (կոորդինատային հարթության կետեր, շառավիղ վեկտորներ) անցում կատարելով կոմպլեքս թվերի հանրահաշվական ձևի գրառմանը: Այս հիման վրա բերվում են փաստարկներ կոմպլեքս թվերի գրառման հանրահաշվական և/կամ եռանկյունաչափական ձևերի տարբեր համակցությունների և դրանց երկրաչափական մեկնաբանությունների օգտագործման նպատակահարմարության մասին՝ կոմպլեքս թվերի հետ գործողությունների վերաբերյալ նյութի ոչ ձևական ուսուցման համատեքստում:

Բանալի բառեր: Կոմպլեքս թվեր, ֆորմալիզմ, համակցում, թվային բազմության հատկություններ, կոմպլեքս հարթություն:

СОЧЕТАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КОНТЕКСТОВ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ КАК ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОСНОВА ПРЕОДОЛЕНИЯ ФОРМАЛИЗМА В ИХ ИЗУЧЕНИИ

Миналто Вадим Сергеевич, Кузнецова Елена Павловна

Резюме. В статье показаны этапы рассмотрения материалов о комплексных числах в школьном курсе математики, начиная с их изъятия из общеобразовательной программы школ СССР (из-за формализма изложения) до возвращения в программы для повышенного или углублённого уровней изучения математики ряда стран постсоветского пространства. Предлагается в качестве теоретической основы неформального обучения теме «Комплексные числа» применение в дидактических материалах сочетания контекстов алгебры и геометрии. Описаны фрагменты методики организации учебной деятельности учащихся по использованию алгебраических и геометрических контекстов комплексных чисел для усвоения школьниками сути свойств (упорядоченности, дискретности, плотности, полноты) нового числового множества $\mathbb{C}$. Раскрыта суть геометрического подхода через переход от геометрических объектов (точек координатной плоскости, радиус-векторов) к введению алгебраической формы записи комплексного числа. На этой основе приведены аргументы целесообразности использования в задачах разных комбинаций алгебраической и/или тригонометрической форм записи комплексных чисел и их геометрических интерпретаций для неформального усвоения материала о действиях над комплексными числами.

Ключевые слова: комплексные числа, формализм, контекст, свойства числового множества, комплексная плоскость.

COMBINATION OF ALGEBRAIC AND GEOMETRIC CONTEXTS OF COMPLEX NUMBERS AS A THEORETICAL BASIS FOR OVERCOMING FORMALISM IN TEACHING

Minalto Vadim Sergeevich, Kuzniatsova Elena Pavlovna

Summary. The article shows the stages of consideration of materials on complex numbers in the school mathematics course, starting with their withdrawal from the general education curriculum of schools in the USSR (due to the formalism of presentation) before returning to programs for advanced or advanced levels of mathematics study in a number of post-Soviet countries. The use of a

combination of algebra and geometry contexts in didactic materials is proposed as a theoretical basis for informal teaching on the topic "Complex Numbers". Fragments of the methodology of organizing students' educational activities on the use of algebraic and geometric contexts of complex numbers for students to assimilate the essence of the properties (orderliness, discreteness, density, completeness) of the new numerical set $\mathbb{C}$ are described. The essence of the geometric approach is revealed through the transition from geometric objects (coordinate plane points, radius vectors) to the introduction of an algebraic form of writing a complex number. On this basis, arguments are given for the expediency of using different combinations of algebraic and/or trigonometric forms of writing complex numbers and their geometric interpretations in problems for informal assimilation of material about actions on complex numbers.
Key words: complex numbers, formalism, context, properties of a numerical set, complex plane.