ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ

ԵՎ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԱՊԱՑՈՒՑԵԼԻՍ

Աշոտ Սոսի Մելիք-Փարսադանյան

Կապանի N3 ավագ դպրոց

Մելիք-Փարսադանյան Ա.Ս.

Անհավասարության հասկացությունը մաթեմատիկայի հիմնարար հասկացություններից է: Դրան վերաբերող տեսական փաստերը և շատ այլ պնդումներ (հայտնի անհավասարություններ) լայն կիրառություններ ունեն մաթեմատիկայի տարբեր բաժիններում: Այսպես, օրինակ, ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը գտնելու վերաբերյալ շատ խնդիրներ հաջողությամբ կարելի է լուծել՝ կիրառելով անհավասարություններ: Նման խնդիրներում, ըստ էության, որոշվում է տվյալ ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը գտնելու, ինչպես նաև նրա սահմանափակության հարցը: Դա նշանակում է, որ ֆունկցիայի հետազոտումը (տարրական եղանակով) հաջողությամբ իրականացնելու համար անհրաժեշտաբար պետք է կիրառվեն անհավասարություններ: Գործնականում կարևորություն ունեցող այնպիսի երկրաչափական խնդիրներ, որոնցում պահանջվում է գտնել փոփոխական տարրեր պարունակող պատկերի որևէ մեծության (գծային չափի, մակերեսի, ծավալի) մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը, հարմար է լուծել՝ կիրառելով անհավասարություններ: Այդպիսի անհավասարություններից է, օրինակ, թվաբանական և երկրաչափական միջինների վերաբերյալ անհավասարությունը (Կոշիի անհավասարություն):

Ինչպես հայտնի է՝ անհավասարության հասկացությունը ներմուծվում է միջին դասարաններում: Այնտեղ դիտարկվում են նաև անհավասարությունների ապացուցման վերաբերյալ որոշ պարզ առաջադրանքներ, որոնցում կիրառվում են անհավասարության հասկացության սահմանումը, նրանից բխող պարզագույն հատկությունները: Այդ փաստերի հիման վրա ապացուցվում և առանձնացվում են մի երկու հայտնի անհավասարություններ, որոնք կարող են կիրառվել՝ այլ անհավասարություններ ապացուցելիս:

Որպես այդպիսի անհավասարություններ գործածվում են հետևյալները.

1) Ցանկացած a և b թվերի համար ճիշտ են հետևյալ անհավասարությունները.

ա) $a^2+b^2 \geq 2ab$, բ) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, գ) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$:

2) Ցանկացած $a>0$ թվի համար ճիշտ է

$$a+\frac{1}{a} \geq 2$$

անհավասարությունը:

3) Ցանկացած a և b դրական թվերի միջին թվաբանականը փոքր չէ դրանց միջին երկրաչափականից՝

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\ :$$

Հասկանալի է, որ սովորողների տարիքային առանձահատկությունը, ինչպես նաև հանրակրթական դպրոցի դասագրքի բովանդակությանը ներկայացվող պահանջները չեն կարող թույլ տալ, որ վերոնշյալ թեման ավելի ծավալուն ու խորությամբ ուսումնասիրվի:

Սակայն նպատակահարմար ենք գտնում, որ ավագ դպրոցի խորացված ուսուցմամբ հենց 10-րդ դասարանում առանձնահատուկ տեղ հատկացվի §Անհավասարությունների ապացուցում¦ թեմային և այնտեղ խորությամբ ուսումնասիրվի այդ կարևոր և մեծ կիրառություններ ունեցող թեման:

Ստորև դիտարկում ենք անհավասարությունների ապացուցման, այսպես ասած, տեղափոխությունների մեթոդի վերաբերյալ որոշ հարցեր և որն էլ լուսաբանում ենք մի քանի օրինակներով:

Հոդվածում քննարկվող նյութերը առաջին հերթին կարող են գործածվել ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի խորացված ուսուցմամբ դասարաններում առավել օժտված սովորողներին նախապատրաստելու մաթեմատիկական օլիմպիադային մասնակցելու համար:

1. **Թեմայի վերաբերյալ տեսական փաստերի ներկայացում**

Հետևյալ պարզ օրինակով փորձենք ցույց տալ, թե որն է այդ մեթոդի էությունը:

Դիցուք՝ ունենք $\{a_1 = 5, a_2 = 2\}$ և $\{b_1 = 7, b_2 = 4\}$ թվազույգերը:

Դիտարկենք $(5;2)$, $(7;4)$, այնուհետև՝ $(5;2)$, $(7;4)$ կարգավորված թվազույգերով առանձնացված խմբերը և յուրաքանչյուրում հաշվենք համապատասխան թվերի արտադրյալների գումարը.

$M = a_1b_1 + a_2b_2 = 5\cdot 7 + 2\cdot 4 = 43,\ \ m = a_1b_2 + a_2b_1 = 5\cdot 4 + 2\cdot 7 = 34:$

Համեմատելով արդյունքները՝ նկատում ենք, որ ավելի մեծ արժեք է ստացվում այն դեպքերում, երբ դրանցից յուրաքանչյուրում թվերը դասավորված են նվազման կարգով, քան այն դեպքում, երբ մեկում թվերը դասավորված են նվազման, իսկ մյուսում՝ աճման կարգով: Ակնհայտ է, որ նույն՝ մեծագույն արժեքը կստացվի նաև այն դեպքում, երբ երկու զույգերում էլ թվերը դասավորված կլինեն աճման կարգով:

Պարզվում է, որ այս փաստը ընդհանուր օրինաչափություն է:

Թեորեմ 1. $[1]$: Դիցուք՝ ունենք թվերի $\{a_1, a_2\}$ և $\{b_1, b_2\}$ զույգերը. որոնց համար $a_1 \ge a_2$ և $b_1 \ge b_2$: Այդ դեպքում

$$a_1b_1 + a_2b_2 \ge a_1b_2 + a_2b_1 : \qquad (1)$$

Ապացուցում: Իրոք

$$a_1b_1 + a_2b_2 - a_1b_2 - a_2b_1 = a_1(b_1 - b_2) - a_2(b_1 - b_2) = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \ge 0 :$$

Ակնհայտ է, որ (1) անհավասարությունը ճիշտ է նաև այն դեպքում, եթե $a_1 \le a_2$ և $b_1 \le b_2$:

Այժմ դիտարկենք $\{a_1 = 8, a_2 = 6, a_3 = 3\}$ և $\{b_1 = 7, b_2 = 5, b_3 = 2\}$ եռյակները: Գտնենք $a_1b_m + a_2b_n + a_3b_k$ արտահայտության հնարավոր արժեքները, որտեղ $\{m, n, k\}$ կարգավորված եռյակները $1;2;3$ թվերի բոլոր հնարավոր տեղափոխություններն են: Նկատենք, որ դրանց քանակը $3! = 6$ է: Ունենք՝

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 8\cdot 7 + 6\cdot 5 + 3\cdot 2 = 92, \qquad (2);$$

$$a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 = 8\cdot 5 + 6\cdot 2 + 3\cdot 7 = 73, \qquad (3)$$

$$a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2 = 8\cdot 2 + 6\cdot 7 + 3\cdot 5 = 73, \qquad (4)$$

$$a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 = 8\cdot 7 + 6\cdot 2 + 3\cdot 5 = 83, \qquad (5)$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_3 = 8\cdot 5 + 6\cdot 7 + 3\cdot 2 = 88, \qquad (6)$$

$$a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 = 8\cdot 2 + 6\cdot 5 + 3\cdot 7 = 67: \qquad (7)$$

Համեմատելով արդյունքները՝ կրկին նկատում ենք, որ մեծագույն արժեքը ստացվում է, երբ այդ եռյակներում թվերը դասավորված են նվազման կարգով, իսկ փոքրագույն արժեքն այն դեպքում է, երբ նրանցից մեկում թվերը դասավորված են աճման, իսկ մյուսում՝ նվազման կարգով: Մնացած չորս դեպքերում՝ $a_1b_m + a_2b_n + a_3b_k$ արտահայտությունն ընդունում է միջակա արժեքներ, որտեղ $m,n,k \in \{1;2;3\}$:

Նկատենք նաև, որ երբ երկու եռյակներում էլ թվերը դասավորենք աճման կարգով, ապա մեծագույն և փոքրագույն արժեքները կստացվեն նույն կերպ:

Ձևակերպենք համապատասխան պնդումը և հիմնավորենք:

Թեորեմ 2. [2]: Դիցուք՝ ունենք $\{a_1,a_2,a_3\}$ և $\{b_1,b_2,b_3\}$ թվերի եռյակները, ընդ որում՝ $a_1 \ge a_2 \ge a_3$, $b_1 \ge b_2 \ge b_3$: Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$M = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, $A_1 = a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1$, $A_2 = a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2$,

$A_3 = a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2$, $A_4 = a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_3$, $m = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1$:

Ապացուցենք, որ

$$m \le A_1 \le A_3 \le M \qquad (8)$$

$$m \le A_2 \le A_4 \le M : \qquad (9)$$

Ապացուցում: Օգտվենք թեորեմ 1-ից.

$$m = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 = (a_1b_3 + a_2b_2) + a_3b_1 \le (a_1b_2 + a_2b_3) + a_3b_1 = a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 = A_1,$$

$$A_1 = a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 = (a_1b_2 + a_3b_1) + a_2b_3 \le (a_1b_1 + a_3b_2) + a_2b_3 = a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 = A_3,$$

$$A_3 = a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 = a_1b_1 + (a_2b_3 + a_3b_2) \le a_1b_1 + (a_2b_2 + a_3b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = M :$$

Այստեղից բխում է (8)-ը: Հանգունորեն կարելի է ստանալ նաև (9)-ը:

Այսպիսով, ապացուցվում է, որ $m \le A_i \le M$, որտեղ $i = 1, 2, 3, 4$:

Դիտողություն 1: Եթե $a_1 \le a_2 \le a_3$ և $b_1 \le b_2 \le b_3$, ապա $-a_1 \ge -a_2 \ge -a_3$ և $-b_1 \ge -b_2 \ge -b_3$: Քանի որ m, A_1, A_2, A_3, A_4, M արտահայտությունների արժեքները չեն փոխվում, հետևաբար թեորեմի պնդումները մնում են անփոփոխ:

Դիտողություն 2: Թեորեմ 2-ի անհավասարություններից բացի, հաճախակի կիրառվում են դրանցից հեշտությամբ ստացվող հետևյալ անհավասարությունները.

$$m \le \frac{A_1 + A_2}{2} \le M \quad (10); \qquad m \le \frac{A_1 + A_2 + M}{3} \le M \quad (11); \qquad m \le \frac{A_1 + A_2 + m}{3} \le M : \quad (12)$$

Ընդհանրացնենք խնդիրը:

Թեորեմ 3. ([3],[6]): Դիցուք՝ ունենք հետևյալ n-յակները՝ $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ և $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$, որոնցում թվերը դասավորված են միաժամանակ աճման կամ նվազման կարգով: Ենթադրենք նաև, որ $i_1, i_2, ..., i_n$ թվերը $1, 2, ..., n$ թվերի ինչ-որ տեղափոխություն է: Այդ դեպքում

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \ge a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \cdots + a_nb_{i_n} \ge a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 : \qquad (13)$$

Ապացուցում: Ընդհանրությունը խախտած չենք լինի, եթե ենթադրենք, որ $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n$ և $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$ (երբ $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ և $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$, ապա հանգունորեն, ինչպես դիտողություն 1-ում): Դիտարկենք $a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \cdots + a_nb_{i_n}$ տեսքի բոլոր գումարները, որտեղ $(i_1, i_2, ..., i_n)$ կարգավորված n-յակը $1, 2, ..., n$ թվերի ցանկացած տեղափոխություն է (որոնց քանակը $n!$ է): Քանի որ այդպիսի գումարների քանակը վերջավոր է, հետևաբար դրանց մեջ կա և՛ փոքրագույնը, և՛ մեծագույնը: Ենթադրենք՝ այդ գումարներից ինչ-որ մեկի մեջ կան այնպիսի a_lb_q և a_kb_p գումարելիներ, որ $l < k$ և $q > p$, այսինքն՝ $a_l \ge a_k$ և $b_p \ge b_q$: Փոխենք b_p-ի և b_q-ի տեղերը, կստանանք նոր գումար, որտեղ a_lb_q և a_kb_p գումարելիները փոխարինված կլինեն a_lb_p և a_kb_q գումարելիներով: Ըստ թեորեմ 2-ի $a_lb_q + a_kb_p \le a_lb_p + a_kb_q$, ուստի ստացված գումարը փոքր չի լինի նախորդից: Կատարելով այդպիսի բոլոր հնարավոր տեղափոխությունները (հասկանալի է, որ դրանց քանակը վերջավոր է), քննարկվող գումարը կհանգեցվի $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ արտահայտությանը, որն էլ կլինի ամենամեծը:

Հանգունորեն, եթե a_lb_q և a_kb_p գումարելիների մեջ $l < k$ և $q > p$, այսինքն $a_l \ge a_k$ և $b_p \le b_q$, փոխելով b_p-ի և b_q-ի տեղերը՝ կստանանք նոր գումար, որում a_lb_q և a_kb_p գումարելիները փոխարինված կլինեն, համապատասխանաբար $a_l b_p$ և $a_k b_q$ գումարելիներով, որը չի գերազանցի տրված գումարին, քանի որ $a_l b_q + a_k b_p \geq a_l b_p + a_k b_q$ ։ Կրկնելով այս գործողությունները վերջավոր անգամ, կստանանք՝ $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$ գումարը, որը կլինի ամենափոքրը։

Այդպիսով թեորեմն ապացուցված է։

2. Դիտարկվող փաստերի գործնական կիրառություններ

Այժմ ապացուցենք մի շարք անհավասարություններ՝ վերը բերված փաստերի կիրառմամբ։

Օրինակ 1. Ապացուցել անհավասարությունը.

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \leq \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{b^3}\sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ որտեղ } a, b > 0 \text{ ։} \quad (14)$$

Ապացուցում: Առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարող ենք ենթադրել $a \geq b$, որտեղից՝

$$\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \text{ և } \frac{1}{a^3\sqrt{a}} \leq \frac{1}{b^3\sqrt{b}} \text{ ։}$$

Օգտվենք (1) անհավասարությունից՝ հաշվի առնելով, որ

$$a_1 = \sqrt{a},\ \ a_2 = \sqrt{b},\ \ b_1 = \frac{1}{b^3\sqrt{b}} \text{ և } b_2 = \frac{1}{a^3\sqrt{a}},$$

կստանանք.

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} = \sqrt{a}\cdot\frac{1}{a^3\sqrt{a}} + \sqrt{b}\cdot\frac{1}{b^3\sqrt{b}} = a_1 b_2 + a_2 b_1 \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 = \sqrt{b}\cdot\frac{1}{a^3\sqrt{a}} + \sqrt{a}\cdot\frac{1}{b^3\sqrt{b}} = \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{b^3}\sqrt{\frac{a}{b}} \text{ ։}$$

Օրինակ 2. Ապացուցել անհավասարությունը.

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ab\frac{a+b}{2} + bc\frac{b+c}{2} + ca\frac{c+a}{2}, \text{ որտեղ } a, b, c \geq 0 \text{ ։} \quad (15)$$

Ապացուցում: Ընդհանրությունը չի խախտվի, եթե ենթադրենք՝ $a \geq b \geq c$ ։ Կիրառենք թեորեմ 2-ը՝ հաշվի առնելով նաև, որ $a^2 \geq b^2 \geq c^2$, կստանանք.

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2\cdot a + b^2\cdot b + c^2\cdot c \geq a^2\cdot b + b^2\cdot c + c^2\cdot a,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2\cdot a + b^2\cdot b + c^2\cdot c \geq a^2\cdot c + b^2\cdot a + c^2\cdot b \text{ ։}$$

Գումարելով ստացված անհավասարությունները՝ կստանանք.

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a),$$

որտեղից էլ կբխի (15)-ը:

Օրինակ 3. Ապացուցել անհավասարությունը.

$$a+b+c\geq\frac{a(b+1)}{a+1}+\frac{b(c+1)}{b+1}+\frac{c(a+1)}{c+1},\ \text{որտեղ}\ a,b,c\geq 0: \qquad (16)$$

Ապացուցում: Ընդհանրությունը չի խախտվի, եթե ենթադրենք՝ $a\geq b\geq c$: Կիրառենք թեորեմ 2-ը՝ հաշվի առնելով, որ $a+1\geq b+1\geq c+1$ և $\frac{a}{a+1}\geq\frac{b}{b+1}\geq\frac{c}{c+1}$, կստանանք.

$$a+b+c=\frac{a}{a+1}\cdot(a+1)+\frac{b}{b+1}\cdot(b+1)+\frac{c}{c+1}\cdot(c+1)\geq$$

$$\geq\frac{a}{a+1}\cdot(b+1)+\frac{b}{b+1}\cdot(c+1)+\frac{c}{c+1}\cdot(a+1)=\frac{a(b+1)}{a+1}+\frac{b(c+1)}{b+1}+\frac{c(a+1)}{c+1}:$$

Օրինակ 4. Ապացուցել, որ ցանկացած a, b, c դրական և $n,k,m\in N$ թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.

$$a^nb^k+b^nc^k+c^na^k\leq a^{n+k}+b^{n+k}+c^{n+k}\leq\frac{a^{n+k+m}}{c^m}+\frac{b^{n+k+m}}{a^m}+\frac{c^{n+k+m}}{b^m}: \qquad (17)$$

Ապացուցում: Ընդհանրությունը չի խախտվի, եթե ենթադրենք՝ $a\geq b\geq c$: Երկու անգամ կիրառենք թեորեմ 2-ը՝ հաշվի առնելով, որ $a^n\geq b^n\geq c^n$ և $a^k\geq b^k\geq c^k$, կստանանք.

$$a^{n+k}+b^{n+k}+c^{n+k}=a^n\cdot a^k+b^n\cdot b^k+c^n\cdot c^k\geq a^n\cdot b^k+b^n\cdot c^k+c^n\cdot a^k: \qquad (18)$$

Քանի որ նաև՝ $a^{n+k+m}\geq b^{n+k+m}\geq c^{n+k+m}$ և $\frac{1}{a^m}\leq\frac{1}{b^m}\leq\frac{1}{c^m}$, ապա

$$\frac{a^{n+k+m}}{c^m}+\frac{b^{n+k+m}}{a^m}+\frac{c^{n+k+m}}{b^m}\geq\frac{a^{n+k+m}}{a^m}+\frac{b^{n+k+m}}{b^m}+\frac{c^{n+k+m}}{c^m}=a^{n+k}+b^{n+k}+c^{n+k}: \qquad (19)$$

(18)-ից և (19)-ից բխում է (17)-ը:

Օրինակ 5. Ապացուցել, որ եթե $a,b,c>0$ և $n\in N$, ապա

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{1}{2}\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right): \qquad (20)$$

Ապացուցում: Ընդհանրությունը չի խախտվի, եթե ենթադրենք՝ $a\geq b\geq c$: Այդ դեպքում դժվար չէ համոզվել, որ $\frac{1}{b+c} \ge \frac{1}{a+c} \ge \frac{1}{a+b}$: Երկու անգամ կիրառենք թեորեմ 2-ը, կստանանք.

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}=a^n\cdot\frac{1}{b+c}+b^n\cdot\frac{1}{c+a}+c^n\cdot\frac{1}{a+b}\ge a^n\cdot\frac{1}{a+b}+b^n\cdot\frac{1}{b+c}+c^n\cdot\frac{1}{c+a}, \quad (21)$$

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}=a^n\cdot\frac{1}{b+c}+b^n\cdot\frac{1}{c+a}+c^n\cdot\frac{1}{a+b}\ge a^n\cdot\frac{1}{c+a}+b^n\cdot\frac{1}{a+b}+c^n\cdot\frac{1}{b+c}: \quad (22)$$

Գումարենք (21)-ը և (22)-ը, այնուհետև կիրառելով $x^n+y^n\ge\frac{1}{2}\left(x^{n-1}+y^{n-1}\right)(x+y)$ անհավասարությունը կունենանք.

$$\ge\frac{\left(a^{n-1}+b^{n-1}\right)(a+b)}{2}\cdot\frac{1}{a+b}+\frac{\left(b^{n-1}+c^{n-1}\right)(b+c)}{2}\cdot\frac{1}{b+c}+\frac{\left(c^{n-1}+a^{n-1}\right)(c+a)}{2}\cdot\frac{1}{c+a}=$$

$$=a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1},$$

որից էլ կբխի (20)-ը:

Օրինակ 6. Ապացուցել, որ եթե $a,b,c>0,$ ապա

$$a^a\cdot b^b\cdot c^c\ge a^{\frac{b+c}{2}}\cdot b^{\frac{a+c}{2}}\cdot c^{\frac{a+b}{2}}: \quad (22)$$

Ապացուցում: Ընդհարությունը չի խախտվի, եթե ենթադրենք, որ $a\ge b\ge c$: Հաշվի առնենք նաև, որ $\ln a\ge\ln b\ge\ln c$: Այդ դեպքում՝

$$a\ln a+b\ln b+c\ln c\ge a\ln b+b\ln c+c\ln a,$$

$$a\ln a+b\ln b+c\ln c\ge a\ln c+b\ln a+c\ln b:$$

Վերջիններս գումարենք, կստանանք.

$$a\ln a+b\ln b+c\ln c\ge\frac{b+c}{2}\ln a+\frac{c+a}{2}\ln b+\frac{a+b}{2}\ln c:$$

Այստեղից էլ բխում է (22)-ը:

Օրինակ 7. Դիցուք՝ a,b,c եռանկյան կողմերն են, իսկ α,β և γ-ն համապատասխանաբար այդ կողմերի դիմացի անկյուններն են (արտահայտված ռադիաններով): Ապացուցել, որ

$$\alpha a+\beta b+\gamma c\ge\alpha\frac{b+c}{2}+\beta\frac{c+a}{2}+\gamma\frac{a+b}{2}: \quad (23)$$

Ապացուցում: Ընդհանրությունը չի խախտվի, եթե ենթադրենք՝ $\alpha\ge\beta\ge\gamma,$ հետևաբար $a\ge b\ge c$: Կիրառելով թեորեմ 2-ը, կարող ենք գրել.

$$\alpha a+\beta b+\gamma c\geq \alpha b+\beta c+\gamma a,$$

$$\alpha a+\beta b+\gamma c\geq \alpha c+\beta a+\gamma b$$

Գումարենք ստացված անհավասարությունները, կստանանք.

$$2(\alpha a+\beta b+\gamma c)\geq \alpha(b+c)+\beta(a+c)+\gamma(a+b),$$

որտեղից էլ բխում է (23)-ը:

Օրինակ 8. Ցանկացած n հատ դրական $a_1,a_2,...,a_n$ թվերի թվաբանական միջինը չի գերազանցում նրանց քառակուսային միջինին.

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\leq\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}: \qquad (24)$$

Ապացուցում: Ընդհանրությունը չի խախտվի, եթե ենթադրենք, որ $a_1\geq a_2\geq...\geq a_n$: Կիրառելով թեորեմ 3-ը, կունենանք հետևյալ անհավասարությունները.

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geq a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_1,$$

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geq a_1a_3+a_2a_4+\cdots+a_{n-1}a_1+a_na_2,$$

....

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geq a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots++a_{n-1}a_2+a_na_1:$$

Գումարենք այդ անհավասարությունները և ստացվածի երկու մասերին ավելացնենք $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ արտահայտությունը,

$$n\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\geq a_1\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)+a_2\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)+\cdots+a_n\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)=$$
$$=\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)=\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^2,$$

այսինքն՝

$$n\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\geq\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^2:$$

Այստեղից էլ կբխի (24)-ը:

Օրինակ 9. Դիցուք՝ $a_1,a_2,...,a_n$ դրական թվեր են, որտեղ $n>1$: Նշանակենք՝ $a_1+a_2+\cdots+a_n=s$: Ապացուցենք, որ

$$\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{s-a_n}\geq\frac{n}{n-1}: \qquad (25)$$

Ապացուցում: Դիցուք՝ $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$, հետևաբար, $\dfrac{1}{s-a_1} \le \dfrac{1}{s-a_2} \le \cdots \le \dfrac{1}{s-a_n}$:

Կիրառելով թեորեմ 3-ը, կարող ենք գրել.

$$\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{s-a_n} \ge \frac{a_1}{s-a_2}+\frac{a_2}{s-a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{s-a_n}+\frac{a_n}{s-a_1},$$

$$\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{s-a_n} \ge \frac{a_1}{s-a_3}+\frac{a_2}{s-a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{s-a_1}+\frac{a_n}{s-a_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{s-a_n} \ge \frac{a_1}{s-a_n}+\frac{a_2}{s-a_1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{s-a_{n-2}}+\frac{a_n}{s-a_{n-1}}:$$

Գումարելով ստացված անհավասարությունները, կստանանք՝

$$(n-1)\left(\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{s-a_n}\right) \ge$$

$$\ge \frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{s-a_1}+\frac{a_1+a_3+\cdots+a_n}{s-a_2}+\cdots+\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{n-1}}{s-a_n}=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}=n:$$

Այստեղից էլ բխում է (25)-ը:

Օրինակ 10. Կոշիի անհավասարությունը $[6]$**:** Ապացուցենք որ ցանկացած n հատ դրական $a_1, a_2, ..., a_n$ թվերի թվաբանական միջինը փոքր չէ այդ թվերի երկրաչափական միջինից.

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}: \qquad (26)$$

Ապացուցում: Անհավասարությունը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով.

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}+\frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}} \ge n:$$

Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}=b_1,\ \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}=b_2,\ldots,\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}=b_n:$$

Անհավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$b_1+b_2+\cdots+b_n \ge n: \qquad (27)$$

Նկատենք, որ

$$b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n = 1: \qquad (28)$$

Դիցուք x_1-ը կամայական դրական թիվ է, x_2-ը ընտրենք այնպես, որ $b_1 = \dfrac{x_1}{x_2}$, x_3-ը ընտրենք այնպես, որ $b_2 = \dfrac{x_2}{x_3}$: Շարունակելով այս գործընթացը՝ x_n-ը ընտրենք այնպես, որ $b_{n-1} = \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$: Ստացվածները տեղադրենք (28)-ի մեջ, կստանանք.

$$\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n} \cdot b_n = 1,$$

այսինքն, $b_n = \dfrac{x_n}{x_1}$: Այդ դեպքում (27)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n: \qquad (29)$$

Ընդհանրությունը չի խախտվի, եթե ենթադրենք՝ $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, որտեղից կհետևի, որ $\dfrac{1}{x_1} \leq \dfrac{1}{x_2} \leq \cdots \leq \dfrac{1}{x_n}$: Կիրառենք թեորեմ 3-ը, կստանանք.

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} = x_1 \cdot \frac{1}{x_2} + x_2 \cdot \frac{1}{x_3} + \cdots + x_{n-1} \cdot \frac{1}{x_n} + x_n \cdot \frac{1}{x_1} \geq$$

$$\geq x_1 \cdot \frac{1}{x_1} + x_2 \cdot \frac{1}{x_2} + \cdots + x_{n-1} \cdot \frac{1}{x_{n-1}} + x_n \cdot \frac{1}{x_n} = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}_{n} = n:$$

Այստեղից էլ բխում է (29)-ը:

Օրինակ 11. Չեբիշևի անհավասարությունը: Դիցուք $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ և $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$, $(n \in N)$: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.

$$\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{n} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \geq \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n}: \qquad (30)$$

Ապացուցում: Անհավասարությունը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով.

$$n\left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n\right) \geq \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right) \cdot \left(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\right) \geq n\left(x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1\right):$$

Կիրառենք թեորեմ 3-ը, կստանանք՝

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \geq x_1 y_2 + x_2 y_3 + \cdots + x_{n-1} y_n + x_n y_1,$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \geq x_1 y_3 + x_2 y_4 + \cdots + x_{n-1} y_1 + x_n y_2,$$

....

$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \ge x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_{n-1}y_2 + x_ny_1$ ։

Գումարենք այդ անհավասարությունները՝ միաժամանակ երկու մասերին ավելացնելով $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ արտահայտությունը, կստանանք.

$$n\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n\right) \ge x_1\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\right) + x_2\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\right) + \cdots + x_n\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\right) =$$
$$= \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\right):$$

Հանգունորեն կարող ենք ապացուցել նաև անհավասարության մյուս մասը:

Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար

Ապացուցել անհավասարությունները.

1. $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n \le \dfrac{a^n + b^n}{2}$, որտեղ $a,b \ge 0$ և $n \in N$ ։

2. $a^p + b^p \le \dfrac{a^{p+q}}{b^q} + \dfrac{b^{p+q}}{a^q}$, որտեղ $a,b > 0,\ \ p,q \ge 0$ ։

3. $a^4 + b^4 + c^4 \ge a^3b + b^3c + c^3a \ge a^2bc + b^2ac + c^2ab$, որտեղ $a,b,c \ge 0$ ։

4. $a^7 + b^7 + c^7 \ge a^2b^2c^2\left(a+b+c\right)$, որտեղ $a,b,c \ge 0$ ։

5. $a^8 + b^8 + c^8 \ge a^3b^3c^3\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$, որտեղ $a,b,c > 0$ ։

6. $\dfrac{a^{10}}{c} + \dfrac{b^{10}}{a} + \dfrac{c^{10}}{b} \ge a^8b + c^8a + b^8c$, որտեղ $a,b,c > 0$ ։

7. $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$, որտեղ $a,b,c > 0$ ։

8. Եթե $a,b,c > 0$ և $a+b+c=1$, ապա $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \ge \dfrac{1}{2}$ ։

9. Եթե $a,b,c > 0$ $n,k \in N$, ապա

$$a^n + b^n + c^n \le \frac{a^n + b^n}{2c^k} + \frac{b^n + c^n}{2a^k} + \frac{c^n + a^n}{2b^k} \le \frac{a^{n+k}}{(bc)^k} + \frac{b^{n+k}}{(ac)^k} + \frac{c^{n+k}}{(ab)^k}:$$

10. Եթե $x,y,z \ge 0,\ \ x+y+z=1$ և $n \in N$, ապա $x^n + y^n + z^n \ge \dfrac{1}{3^{n-1}}$ ։

11. ա) $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \ge a^2b + b^2c + c^2d + d^2a$, որտեղ $a,b,c,d \ge 0$ ։

բ) $a_1^{m+k} + a_2^{m+k} + \cdots + a_n^{m+k} \geq a_1^m a_2^k + a_2^m a_3^k + \cdots + a_n^m a_1^k$, որտեղ $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ և $n, m, k \in N$:

12. ա) $a^a \cdot b^b \cdot c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$, որտեղ $a, b, c > 0$:

բ) $x_1^{x_1} \cdot x_2^{x_2} \cdot ... \cdot x_n^{x_n} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}$, որտեղ $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ և $n \in N$:

13. ա) $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd} \leq \frac{3}{2}(a + b + c + d)$, որտեղ $a, b, c, d \geq 0$:

բ) $\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_1 a_3} + \cdots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$, որտեղ $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ և $n \in N$:

14. $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_3^2} + \cdots + \frac{x_n}{x_1^2} \geq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$, որտեղ $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ և $n \in N$:

Գրականություն

1. ***Գևորգյան Գ. Գ., Սահակյան Ա. Ա.*** **(2010),** Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար, 11-րդ դաս. Տիգրան Մեծ, Երևան 2010, էջ 80

1. ***Առաքելյան Կ.Գ.*** **(2010),** Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, 11-րդ դաս. Խնդիրների լուծման ուղեցույց, Էդիտ պրինտ, Երևան 2010, էջ 91-96

2. ***Այվազյան Է. Ի.*** **(2010),** Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, 11-րդ դաս. Խնդիրների լուծման ուղեցույց, Էդիտ պրինտ, Երևան 2010, էջ 78-79

3. ***Гомонов С. А.*** **(2006).** Замечательные неравенства, «Дрофа», Москва 2006, стр.184

4. ***Сивашинский И.Х.*** **(1967).** Неравенства в задачах, Наука, Москва 1967, стр. 12

5. ***Харди Г.Г. Литлвуд Дж..И. Полиа Г. (*****2007).** Неравенства, Москва 2007, стр. 314-315

6. ***Mitrinovic D.S.*** **(1964).** Elementari inequalities, P. Noordoff Ltd-Groningen 1964. page 131

7. ***Pham Kim Hung,*** **(2007).** Sekrets in Inequalities, volume 1, GIL Publishing House 2007, page 91-92.

ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ ԵՎ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԱՊԱՑՈՒՑԵԼԻՍ

Մելիք-Փարսադանյան Աշոտ Սոսի

Ամփոփում: Անհավասարության հասկացությունը մաթեմատիկայի հիմնարար հասկացություններից է: Դրան վերաբերող տեսական փաստերը և շատ այլ պնդումներ (հայտնի անհավասարություններ) լայն կիրառություններ ունեն մաթեմատիկայի տարբեր բաժիններում: Այսպես, օրինակ, ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը գտնելու վերաբերյալ շատ խնդիրներ հաջողությամբ կարելի է լուծել՝ կիրառելով անհավասարություններ: Նման խնդիրներում, ըստ էության, որոշվում է տվյալ ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը գտնելու, ինչպես նաև նրա սահմանափակության հարցը: Դա նշանակում է, որ ֆունկցիայի հետազոտումը (տարրական եղանակով) հաջողությամբ իրականացնելու համար անհրաժեշտաբար պետք է կիրառվեն անհավասարություններ: Գործնականում կարևորություն ունեցող այնպիսի երկրաչափական խնդիրներ, որոնցում պահանջվում է գտնել փոփոխական տարրեր պարունակող պատկերի որևէ մեծության (գծային չափսի, մակերեսի, ծավալի) մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը, հարմար է լուծել՝ կիրառելով անհավասարություններ: Այդպիսի անհավասարություններից է, օրինակ, թվաբանական և երկրաչափական միջինների վերաբերյալ անհավասարությունը (Կոշիի անհավասարություն): Հոդվածում դիտարկվում է լայն կիրառություններ ունեցող մի անհավասարություն, որը, պայմանականորեն, կարելի անվանել «անհավասարություն՝ տեղափոխությունների վերաբերյալ»: Բերվում են այդ անհավասարության ապացուցումներ, որոշ մասնավոր և ընդհանուր դեպքերի համար: Այնուհետև, լուծվում են բազմաթիվ խնդիրներ այդ անհավասարության կիրառմամբ: Մասնավորապես, առանց դժվարության ապացուցվում են Կոշիի և Չեբիշևի, ինչպես նաև միջին թվաբանականի և միջին քառակուսայինի կապն արտահայտող նշանավոր անհավասարությունները: Այսպիսով՝ տեղափոխությունների վերաբերյալ անհավասարությունների կիրառությունները, բազմաթիվ անհավասարություններ ապացուցելիս, թույլ է տալիս եզրակացնել, որ գործ ունենք անհավասարությունների ապացուցման ևս մի կարևոր մեթոդի հետ: Հոդվածի վերջում առաջարկվում են անհավասարություններ, նշված մեթոդով ինքնուրույն ապացուցելու համար:

Բանալի բառեր: Անհավասարություն, մեթոդ, թեորեմ, ապացուցում, տեղափոխություն, մոնոտոն աճող (նվազող), մեծագույն (փոքրագույն) արժեք, թվաբանական միջին, երկրաչափական միջին, քառակուսային միջին:

THE PERMUTATION METHOD AND ITS APPLICATION TO THE PROOF OF INEQUALITIES

Ashot Melik-Parsadanyan

Summary: Inequality is a fundamental concept in mathematics, with many theoretical facts and established statements (well-known inequalities) having broad applications across various branches of the field. One such application is in solving problems related to finding the range of values of a function, where inequalities play a crucial role in determining the function's maximum or minimum values and its limitations. Geometric problems that require finding the maximum or minimum value of a certain characteristic (linear size, area, volume, etc.) of a figure with variable elements can also be effectively addressed using inequalities. The Cauchy inequality, which establishes the relation of arithmetic and geometric means, is one such example. This article focuses on a widely applicable inequality that can be referred to as a "permutation inequality". The article presents proofs for both special and general cases of this inequality and demonstrates its usefulness through solving numerous problems, including well-known inequalities such as the Cauchy and Chebyshev's inequality, as well as the inequality expressing the relation of arithmetic and quadratic means. The application of permutation inequalities in proving numerous inequalities highlights its importance as a method of proving inequalities. Overll, the use of permutation inequalities offers an effective approach to solving problems related to inequalities, making it a valuable tool for mathematicians.At the end of the article, some inequalities are suggested to be proved independently by the specified method.

Key words: inequalities, method, theorem, proof, permutation, monotonically increasing (decreasing), largest (smallest) value, arithmetic mean, geometric mean, quadratic mean.

МЕТОД ПЕРЕСТАНОВОК И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАВЕНСТВ

Ашот Мелик-Парсаданян

Резюме. Понятие неравенства является одним из основных понятий математики. Теоретические факты, которые относятся к этому и многие другие утверждения (известные неравенства), широко применяются в разных разделах математики. Так, например, применив известные неравенства, легко можно решить многие задачи о нахождении множества значений функции. В подобных задачах, по существу, определяется наибольшое или наименьшее значение данной функции, а также вопрос его ограниченности. Это значит, что для успешного исследования функции (элементарным способом) необходимо использовать неравенства. В практике геометрические задачи, имеющие первостепенную важность, в которых требуется найти наибольшое или наименьшее значение величины (линейного отрезка, площади или объёма), удобно решить применив нервенства, например, неравенство между арифметическими и геометрическими средними (неравенство Коши). В статье рассматривается широко применяемое одно неравенство, которое условно можно назвать «неравенство о перестановках». Приводятся доказательсва этого неравенства в частных и общих случаях. Затем доказываются многочисленные неравенства с применением109этого неравенства. В частности, доказываются без труда известные неравенства Коши и Чебышева, а также неравенство, выражающее свяазь между арифметическими и квадратичными средними. Таким образом, доказывая многочисленные неравенства с применением неравенства о перестановке, нас приводит к выводу, что это является еще одним важным методом доказательства неравенств. В конце статьи предложены неравенства для самостоятельного доказательства указанным методом.

Ключевые слова. Неравенство, метод, перестановка, теорема, доказательство, монотонно возрасатающий (убывающий), наибольшое (наименьшее) значение, среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее квадратичное.

Ստացվել է խմբագրություն՝ 20.04.2023
Գրախոսվել է՝ 15.08.2023
Կայքէջ է ուղարկվել՝ 20.08.2-23