

**ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ՀԻՄՆԱԽՆԴԻՐՆԵՐ
ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ
PROBLEMS OF TRAINING**

**ԹՎԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԱՄԲՈՂՁ ԹՎԵՐԻ
ԲԱԺԱՆՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹՅՈՒՄ**

ORCID: 0009-0003-3034-4613

Աբրահամյան Լիանա Ռուդիկի

ԱՐՊՀ



Աբրահամյան Լ. Ռ., ֆ.մ.գ. թ., դոցենտ

24 տարեկանում գերմանացի մաթեմատիկոս, աստղագետ և ֆիզիկոս Կառլ Ֆրիդրիխ Գաուսը (ապրիլի 30, 1777 – փետրվարի 23, 1855) հրատարակեց հանրահայտ «Թվաբանական հետազոտություններ» աշխատությունը, որտեղ նա ներկայացրեց համեմատությունների տեսությունը: Հենց «Թվաբանական հետազոտություններում» առաջին անգամ կիրառվեց համեմատությունների ժամանակակից լեզուն՝ հնարավորություն տալով թվերի բաժանելիության հետ աշխատել այնպես, ինչպես

հավասարությունների հետ: Ամբողջ թվերի բաժանելիության մասին փաստերի զբանցման մինչգաուսյան բոլոր եղանակները դժվար ընթեռնելի էին և, հետևաբար, անհարմար: Ներկա հոդվածում դիտարկված են ամբողջ թվերի բաժանման վերաբերյալ դպրոցական այնպիսի խնդիրների լուծումներ, որոնցում օգտագործվում են (համեմատությունների) բաղդատումների տեսությունը, մնացորդների դիտարկումը և էյլերի թեորեմը:

1. Բաժանման վերաբերյալ խնդիրների լուծումը բաղդատումների տեսության մեթոդներով:

Կասենք, որ a և b ամբողջ թվերը բաղդատելի են ըստ m մոդուլի ու կգրառենք՝

$$a \equiv b \pmod{m},$$

եթե a -ն և b -ն m -ի բաժանելիս տալիս են նույն մնացորդը, կամ որ նույնն է, $a - b$ տարբերությունը բաժանվում է m -ի առանց մնացորդի: Եթե (a, b) ն չի բաժանվում m -ի, ապա կասենք, որ a ու b ամբողջ թվերը բաղդատելի չեն ըստ m մոդուլի և կգրենք $a \not\equiv b \pmod{m}$: Այս $\equiv$ հարաբերությունը կոչվում է բաղդատման հարաբերություն, որը օժտված է ստորև բերված հատկություններով [1]:

Հատկություն 1: Որպեսզի a և b ամբողջ թվերը լինեն բաղդատելի ըստ մոդուլ m -ի անհրաժեշտ է և բավարար, որ $a = mq + r$, $b = mq_1 + r$, $0 \leq r < m$:

Հատկություն 2: $a \equiv a \pmod{m}$, $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$,

$$a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}:$$

Այլ կերպ ասաց, բաղդատման հարաբերությունը համարժեքության հարաբերություն է՝ որոշված Z բազմության վրա:

Հատկություն 3: Եթե $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$ և $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$, ապա $a_1 \pm a_2 \equiv b_1 \pm b_2 \pmod{m}$ և $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{m}$:

Հետևություն: Բաղդատման երկու կողմերին կարելի է ավելացնել միևնույն ամբողջ թիվը՝ առանց փոխելու բաղդատման մոդուլը: Բաղդատման երկու կողմերը կարելի է բազմապատկել միևնույն ամբողջ թվով՝ առանց փոխելու բաղդատման մոդուլը: Բաղդատման երկու կողմերը կարելի է բարձրացնել միևնույն բնական ցուցիչով աստիճան՝

առանց փոխելու բաղդատման մոդուլը: Բաղդատման որևէ կողմում եղած գումարելին կարելի է տեղափոխել բաղդատման մյուս կողմ՝ փոխելով գումարելու նշանը և չփոխելով բաղդատման մոդուլը:

Դիտարկենք բաժանման վերաբերյալ խնդիրների լուծումը բաղդատումների տեսության մեթոդներով:

Խնդիր 1 [2]: Ապացուցեք, որ ցանկացած n բնական թվի համար $2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n$ բաժանվում է 14-ի :

Լուծում: Ապացուցումը հետևում է հետևյալ ձևափոխությունից՝

$$2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n = 2^{n-1}(2^3 + 2^2 + 2) = 14 \cdot 2^{n-1} \equiv 0 \cdot 2^{n-1} = 0 \pmod{14}$$

Խնդիր 2: Ապացուցեք, որ ցանկացած n բնական թվի համար $7^{2n} - 4^{2n}$ բաժանվում է 33-ի :

Լուծում: Ապացուցումը հետևում է հետևյալ դատողություններից՝

$$\begin{aligned} 7^{2n} &\equiv 7^{2n} \pmod{33}, \\ -4^2 &\equiv -7^2 \pmod{33}, \\ -4^{2n} &\equiv -7^{2n} \pmod{33}: \end{aligned}$$

Այսպիսով՝ $7^{2n} - 4^{2n} \equiv 7^{2n} - 7^{2n} = 0 \pmod{33}$:

Խնդիր 3: Ապացուցեք, որ ցանկացած n բնական թվի համար $3^{n+2} + 4^{2n+1}$ թիվը բաժանվում է 13-ի:

Լուծում: Հաշվի առնելով, որ $9 \equiv -4 \pmod{13}$, $16 \equiv 3 \pmod{13}$ և գումարելով հետևյալ բաղդատումները՝

$$\begin{aligned} 3^{n+2} &\equiv 3^n \cdot 3^2 \equiv 9 \cdot 3^n \equiv -4 \cdot 3^n \pmod{13} \\ 4^{2n+1} &\equiv 4 \cdot 4^{2n} \equiv 4 \cdot 16^n \equiv 4 \cdot 3^n \pmod{13} \end{aligned}$$

կստանանք՝

$$3^{n+2} + 4^{2n+1} \equiv 0 \pmod{13}:$$

2. Բաժանման վերաբերյալ խնդիրների լուծումը մնացորդների (Rest) դիտարկման մեթոդով:

Կասենք, որ a ամբողջ թիվը բաժանվում է b ամբողջ թվի վրա և կգրենք a/b կամ $b \setminus a$, եթե գոյություն ունի այնպիսի c ամբողջ թիվ, որ $a = b \cdot c$ (այս դեպքում ասում են նաև, որ a -ն առանց մնացորդի է բաժանվում b -ի վրա): a -ն կոչվում է բաժանելի կամ b -ի պատիկ (երբեմն նաև բազմապատիկ), b -ն՝ a -ի բաժանարար, իսկ c -ն քանորդ (եթե $b \neq 0$): Հակառակ դեպքում գրվում է՝ $a \nmid b$ կամ $b \nmid a$ և կարդացվում է՝ a -ն չի բաժանվում b -ի վրա [3-7]:

Թեորեմ. (Էվկլիդես)[1]: Ցանկացած a և $b \neq 0$ ամբողջ թվերի համար գոյություն ունեն միարժեքորեն որոշվող այնպիսի q և r ամբողջ թվեր, որ

$$a = bq + r \text{ և } 0 \leq r < |b|:$$

Նշանակենք $\text{Rest}(a, b) = r$ (Rest անգլ. մնացորդ) և փաստենք, հետևյալ արդյունքը՝ տրված b բնական թվի վրա մի քանի $a_1 \cdots a_n$ ամբողջ թվերի գումարի կամ արտադրյալի (ինչպես նաև a ամբողջ թվի a^k բնական աստիճանի) բաժանման մնացորդը գտնելու համար բավական է գործել b բնական թվի վրա բաժանումից ստացվող հայտնի $\text{Rest}(a_i, b)$, $i = 1, 2, \dots, n$ մնացորդների հետ: Այսինքն՝ գումարի մնացորդը հավասար է մնացորդների գումարի մնացորդին, արտադրյալի մնացորդը՝ մնացորդների արտադրյալի մնացորդին, աստիճանի մնացորդը աստիճանի մնացորդի մնացորդին՝

$$\text{Rest}(a_1 + \dots + a_n, b) = \text{Rest}(\text{Rest}(a_1, b) + \dots + \text{Rest}(a_n, b));$$

$$\text{Rest}(a_1 \cdots a_n, b) = \text{Rest}(\text{Rest}(a_1, b) \cdots \text{Rest}(a_n, b));$$

$$\text{Rest}(a^k, b) = \text{Rest}(\text{Rest}(a, b))^k, b):$$

Դիտարկենք բաժանման վերաբերյալ խնդիրների լուծումը մնացորդների դիտարկման մեթոդով:

Խնդիր 4 [2]: Ապացուցեք, որ $a^3 + 5a$ բաժանվում է 6-ի:

Լուծում: a բնական թիվը 6-ի վրա բաժանելուց ստացվող բոլոր հնարավոր մնացորդները դասավորենք ստորև պատկերված աղյուսակի առաջին տողում, այնուհետև ըստ խնդրի պայմանի լրացնենք աղյուսակի մնացած տողերը: Կատարենք՝

$\text{Rest}(a, 6)$	0	1	2	3	4	5
$\text{Rest}(a^3, 6)$	0	1	2	3	4	5

Rest $(5a,6)$	0	5	4	3	2	1
Rest $(a^3 + 5a,6)$	0	0	0	0	0	0

Վերջին տողում ստացված 0-ները ապացուցում է, որ $a^3 + 5a$ բաժանվում է 6-ի:

Խնդիր 5: Ապացուցեք, որ $a^5 + 9a$ բաժանվում է 5-ի:

Լուծում: Ապացուցումը բխում է հետևյալ աղյուսակից՝

Rest $(a,5)$	0	1	2	3	4
Rest $(a^5,5)$	0	1	2	3	4
Rest $(9a,5)$	0	4	3	2	1
Rest $(a^5 + 9a,5)$	0	0	0	0	0

Խնդիր 6: Ապացուցեք, որ $a^5 - a$ բաժանվում է 30-ի:

Լուծում: Իհարկե, խնդիրը կարող եք լուծել ստանդարտ եղանակով. հաշվի առնելով 30-ի վրա բաժանելուց ստացվող բոլոր երեսուն մնացորդները՝ 0,1, ..., 29, և համոզվեք, որ a -ն և a^5 -ը ունեն նույն մնացորդները, երբ բաժանվում են 30-ի, և հետևաբար, $a^5 - a$ թիվը 30-ի բաժանելիս տալիս է զրո մնացորդ:

Այնուամենայնիվ, շատ ավելի հեշտ է լուծել այս խնդիրը, օգտագործելով փոխադարձաբար պարզ թվերի հատկությունները. Մասնավորապես, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, որտեղ 2, 3 և 5 թվերը զույգ առ զույգ փոխադարձաբար պարզ են:

Rest $(a,2)$	0	1	Rest $(a,3)$	0	1	-1	Rest $(a,5)$	0	1	2	-	-1
											2	
Rest $(a^5,2)$	0	1	Rest $(a^5,3)$	0	1	-1	Rest $(a^5,5)$	0	1	2	-	-1
											2	

Rest $(a^5 - a, 2)$	0	0	Rest $(a^5 - a, 3)$	0	0	0	Rest $(a^5 - a, 5)$	0	0	0	0	0
------------------------	---	---	---------------------	---	---	---	---------------------	---	---	---	---	---

այսպիսով $a^5 - a$ թիվը բաժանվում է 2, 3 և 5 թվերի վրա, հետևաբար այն բաժանվում է 30-ի:

Խնդիր 7: $4ab$ բաժանվում է 100-ի, եթե $a^8 + b^8$ բաժանվում է 5-ի:

Լուծում: a բնական թվի 5-ի վրա բաժանելուց ստացվող բոլոր հնարավոր մնացորդները դասավորենք ստորև պատկերված աղյուսակի առաջին տողում:

Rest $(a, 5)$	0	1	2	3	4
Rest $(a^8, 5)$	0	1	1	1	1

Դիցուք a - ն չի բաժանվում 5-ի (տես աղյուսակի 2 տողը), այդ դեպքում կստանանք՝

$$a^8 \equiv 1(\text{mod } 5) \text{ և } \begin{cases} b^8 \equiv 1(\text{mod } 5) \\ b^8 \equiv 0(\text{mod } 5) \end{cases}$$

$a^8 + b^8 \equiv 2(\text{mod } 5)$, կամ $a^8 + b^8 \equiv 1(\text{mod } 5)$, և հետևաբար $a^8 + b^8$ չի բաժանվում 5-ի,

Այսպիսով, a -ն բաժանվում 5-ի, համանմանորեն b -ն բաժանվում 5-ի, և հետևաբար

$$a = 5n, b = 5m, 4ab = 100mn,$$

այսինքն $4ab$ -ն բաժանվում է 100-ի:

3. Բաժանման վերաբերյալ խնդիրների լուծումըԷյլերի թեորեմի կիրառությամբ

Հետազայում կկիրառենք հետևյալ $\varphi(m)$ ֆունկցիան [1]: Դիցուք m -ը ամբողջ և դրական թիվ է: $\varphi(m)$ -ով նշանակենք այն ամբողջ և դրական թվերի քանակը, որոնք չեն գերազանցում m -ը և փոխադարձաբար պարզ են նրա հետ, այսինքն

$$\varphi(m) = \left| \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq m, (x, m) = 1\} \right|:$$

Այսպիսով ստացվում է մի $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ֆունկցիա (արտա-պատկերում), որը բոլոր ամբողջ և դրական թվերի բազմությունն արտապատկերում է իր մեջ հետևյալ կերպ. $m \rightarrow \varphi(m)$, $m \in \mathbb{N}$: Այդ ֆունկցիան կոչվում է Էյլերի ֆունկցիա, կամ ավելի ճիշտ Էյլերի φ ֆունկցիա:

Եթե n բնական թիվն ունի $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ կանոնական վերլուծությունը, ապա

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right):$$

Հետևյալ թեորեմը կարևոր դեր ունի բաղդատումների տեսության մեջ, և հնարավորություն է տալիս լուծել բաժանման վերաբերյալ մի քանի խնդիրներ:

Թեորեմ (Էյլեր, 1763թ.) [1]: Եթե $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ և $(a, m) = 1$, ապա $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, որտեղ $\varphi(m)$ -ը Էյլերի ֆունկցիան է:

Խնդիր 8 [8]: Գտեք 243^{402} թվի վերջին երեք թվանշանը:

Լուծում: 243^{402} թվի վերջին երեք թվանշանը կլինի այն մնացորդը, որը ստացվում է 243^{402} թիվը 1000-ի վրա բաժանելիս: Քանի որ $(243, 1000) = 1$ և $\varphi(1000) = 400$, ապա ըստ Էյլերի թեորեմի $243^{400} \equiv 1 \pmod{1000}$:

Հետևաբար, $243^{402} = 243^{400} \cdot 243^2 \equiv 1 \cdot 59049 \equiv 49 \pmod{1000}$:

Այսպիսով, 243^{402} թվի վերջին երեք թվանշանը կլինի 049:

Խնդիր 9: Գտեք 93^{41} թիվը 111-ի վրա բաժանելուց ստացվող մնացորդը [8]:

Լուծում: Դիցուք 93^{41} թվի վերջին 111-ի վրա բաժանելուց ստացվող մնացորդը հավասար x , այսինքն՝ $93^{41} \equiv x \pmod{111}$:

Քանի որ $(93, 111) = 3$, ապա բաժանելով $93^{41} \equiv x \pmod{111}$ բաղդատման երկու մասերը 3-ի վրա կստանանք՝ $93^{41} = 93 \cdot 93^{40} \equiv 31 \cdot 93^{40} \equiv x_1 \pmod{37}$:

Հաշվումներից հետո կստանանք՝ $x_1 = 7$, $x = 3x_1 = 21$:

Գրականություն

1. Մովսիսյան Յու.Մ., (2023). Բարձրագույն հանրահաշիվ և թվերի տեսություն, Երևան 2023թ.:

2. *Деза Е. И.* (2011). Специальные числа натурального ряда. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2011.
3. *Бухштаб А.А.* (1966). Теория чисел. М.: Просвещение, 1966.
4. *Василенко О. Н., Галочкин А. И.* (1995). Сборник задач по теории чисел. М.: Изд-во МГУ, 1995.
5. *Виноградов И. М.* (1981). Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.
6. *Галкин В. Я., Сычуглов Д. Ю., Хорошилова Е. В.* (2002). Конкурсные задачи, основанные на теории чисел. М.: Изд-во МГУ, 2002.
7. *Серпинский В.* (1968). 250 Задач По Элементарной Теории чисел. М.: Просвещение, 1968. 168 с.
8. *Грибанов В. У., Титов П. И.* (1964). Сборник упражнений по теории чисел. М.: Просвещение, 1964.

**ԹՎԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐԻ
ԲԱԺԱՆՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹՅՈՒՄ**
Արթահամյան Լիանա Ռուդիկի

Ամփոփում: Հոդվածում կիրառելով թվային բաղդատումների (համեմատությունների) լեզուն և հատկությունները լուծված են մի շարք խնդիրներ թվերի տեսությունից: Պարզվում է, որ համեմատությունների կիրառումը խնդիրներում շատ հարմար և շատ հզոր գործիք է, քանի որ դա, ինչպես մենք կհահամոզվենք հետագայում, թույլ է տալիս գործել բաղդատումների հետ, այնպես ինչպես, սովորության համաձայն, կարելի է գործել հավասարությունների հետ, այսինքն՝ գումարել, հանել, բազմապատկել, երբեմն բաժանել նրանց: Ներկա հոդվածում դիտարկված են ամբողջ թվերի բաժանման վերաբերյալ դպրոցական այնպիսի խնդիրների լուծումներ, որոնցում օգտագործվում են (համեմատությունների) բաղդատումների տեսությունը, մնացորդների դիտարկումը և Էյլերի թեորեմը: Առաջին և երրորդ մեթոդները հավանաբար նոր են հանրակրթական դպրոցի ուսուցիչների համար, իսկ երկրորդը մեթոդը հարմար է կիրառել այն դեպքում, երբ բաժանարարը շատ մեծ թիվ չէ: Աշխատանքը կազմված է երեք պարագրաֆներից: Յուրաքանչյուր պարագրաֆ պարունակում է մեթոդի լուսաբանմանը նվիրված տեսական մաս և խնդիրների լուծման օրինակներ: Առանձնահատուկ ուշադրություն է դարձվում

օգտագործված գրականության [1-8] ցանկին, այն պարունակում է տարրական թվերի տեսության առավել գոծածական դասագրքեր: Դիտարկված վարժությունների մեծ մասը վերցված են հենց այդ գրքերից:

Բանալի բառեր. Թվային բաղդատումներ, ամբողջ թվեր, բաժանում մնացորդով, խնդիր, լուծում:

APPLICATION OF SOME METHODS OF NUMBER THEORY IN THE PROCESS OF SOLVING SCHOOL PROBLEMS ON DIVISION OF WHOLE NUMBERS

Abrahamyan Liana Rudik

Summary: Using the language and properties of numerical comparisons a number of tasks from number theory are solved in the article. It turns out that the use of comparisons in problems is a very convenient and very powerful tool, because, as we will see later, it allows us to work with additions in the same way that, according to the habit, we can work with equalities, that is, addition, subtraction, multiplication, sometimes divide them. The present article examines the solution of division problems by methods that demonstrate the use of summation theory, consideration of remainders, and Euler's theorem. The first and third methods are new for public school teachers, probably, and the second method is convenient to use, in the event that the divisor is not a very large number. The work consists of three paragraphs. Each paragraph contains a theoretical part and examples of solving problems. Particular attention is paid to the list of used literature [1-8], it contains the best textbooks of elementary number theory. Most of the exercises in the manual are taken from those books.

Key words. Congruent integers, whole numbers, division with remainder, task, solution.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ЧИСЛ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ШКОЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Абрамян Лиана Рудиковна

Резюме. В настоящей статье с использованием языка и свойств числовых сравнений решается ряд задач из теории чисел. Оказывается, использование сравнений в задачах это очень удобный и очень мощный инструмент, поскольку, как мы увидим далее, он позволяет нам работать со сравнениями так же, как мы по привычке можем работать с равенствами, то есть суммировать, вычитать, умножать, а иногда и делить их. В данной статье рассматриваются решения некоторых школьных задач на деление целых чисел, в которых используются теория сравнений, учет остатков при делении и теорема Эйлера. Первый и третий методы, вероятно,

новы для учителей общеобразовательных школ, а второй метод удобно использовать, лишь тогда когда делитель не очень большое число. Работа состоит из трех параграфов. Каждый параграф содержит теоретическую часть, посвященную объяснению метода и примеры решения задач. Особое внимание уделено списку использованной литературы [1-8], в нем собраны наиболее наглядные учебники по элементарной теории чисел. Большинство упражнений в статье взяты именно из этих книг.

Ключевые слова. Сравнения целых чисел, деление с остатком, задача, решение.

Утандылъ тӳдӱрмӱсӱ 20.04.2023

Ғрыһунылъ тӳ 15.08.2023

Чыпртӳ тӳһирӱлӱ 20.08.2-23