ЕЩЕ ОДИН СПОСОБ ВВЕДЕНИЯ В ПРОЦЕНТЫ

Золотухин Юрий Прокофьевич

Республика Беларусь

***Золотухин Ю.П.**, к. ф.м. н., доцент*

1. *Процентом от числа А* называют сотую часть (долю) этого числа.

Для обозначения процентов используют символ % и пишут 1% (A) = $\frac{A}{100}$ или более кратко – 1% = $\frac{A}{100}$. Соответственно, p процентов от числа A обозначают через p%(A). Далее, если не утверждается другого, считается, что числа, встречающиеся в данной статье, положительные.

Число А, принимаемое за 100 %, назовем *процентной базой* (кратко – *базой*). Всякое число, которое выражается в процентах от числа А, будем называть *объектом*. Аналогично вводятся понятия процента, процентной базы и объекта для положительных величин.

Например, один процент от числа 5 – число $\frac{1}{20}$ (1%(5) = $\frac{1}{20}$), а один процент от величины 500 км есть величина 5 км (1% (500 км) = 5 км). В первом случае база – число 5, объект – число $\frac{1}{20}$, а во втором случае база – величина 500 км, объект – величина 5 км.

Решение типовой задачи на проценты по излагаемой в данной статье методике предполагает выявление в ее сюжете процентной базы и объекта, а также составление на этой основе линейного уравнения относительно искомого числа (величины) или процентов от числа (величины). Назовем этот способ решения задачи на проценты *стандартным*. Заметим, чтобы выявить процентную базу достаточно ответить вопрос «Какое число в задаче принято или следует принять за 100%?», а, чтобы выявить объект – «Какое число выражено или следует выразить в процентах от процентной базы?». Аналогичные вопросы и ответы на них помогут решить типовую задачу на проценты от величин.

2. Рассмотрим, сначала, *основные задачи на проценты* для чисел.

Нахождение числа по его процентам

Задача 1. Найти число Х, если р% от него равны числу А.

Решение. Определяем: база – искомое число Х, объект – число А.

Составляем равенства:

Х = 100%,

А = р%.

Перемножаем их «крест-накрест»: Х·р = А·100.

Находим:

$$\mathbf{X = \frac{A}{p}\,100}. \qquad (1)$$

Комментарий к решению задачи 1. Более подробно: неизвестное число Х решили измерить его же сотой долей – процентом от Х: Х = 100% (∗), где 1% = $\frac{X}{100}$ (аналогия: 1 м = 100 см, где 1 см = $\frac{1\text{ м}}{100}$). Согласно условию, число А равно р% от Х, то есть его мера в процентах от Х равна р: А = р% (∗∗), где

1% = $\frac{X}{100}$.

Перемножив верные равенства (∗) и (∗∗) «крест-накрест», получим верное равенство $X \cdot p\% = A \cdot 100\%$, левая и правая части которого записаны относительно одной и той же единицы измерения – %. Разделив обе его части на 1%, получили безразмерное линейное относительно X уравнение $X \cdot p = A \cdot 100$. И т.д.

Более глубокое обоснование манипуляций, использованных для решения данной задачи (в частности, перемножения «крест-накрест»), проведено в п. **6**.

Назовем для краткости в рамках данной статьи указанный способ *стандартным*.

Пример 1. Найти число, 20% которого равно 7.

Решение. Определяем: процентная база – искомое число X, объект – число 7.

Составляем равенства:

$X = 100\%$,

$7 = 20\%$.

Перемножаем их «крест-накрест»: $X \cdot 20 = 7 \cdot 100$.

Находим: $X = \frac{7}{20}100 = 35$.

Ответ: 35.

Нахождение процентов от данного числа

Задача 2. Найти число У, составляющее p% от числа В.

В данном случае: база – число В, объект – неизвестное число У. Задачу можно решить стандартным способом. Однако имеется более рациональное решение:

Решение. $У = p\%(В) = 1\%(В) \cdot p = \frac{В}{100} \cdot p$.

Итак,

$$\mathbf{У = \frac{В}{100} \cdot p}. \qquad (2.1)$$

Полученную формулу можно сформулировать в виде правила:

Правило 1. *Чтобы найти проценты от числа, достаточно разделить это число на 100 (т.е. найти один процент от него), и полученный результат умножить на количество процентов.*

Переписав формулу (2.1), в виде

$$\mathbf{У = \frac{p}{100} В}, \qquad (2.2)$$

можно сформулировать еще одно правило:

Правило 2. *Чтобы найти проценты от числа, достаточно разделить количество процентов на 100, и полученный результат умножить на это число.*

Пример 2. Найти 40% от числа 5.

В данном случае: база – число 5, объект – неизвестное число У, составляющее 40% от числа 5. Пример можно решить стандартным способом. Однако более рациональное решение получаем по правилу 1:

Решение (по правилу 1). 40%(5) = $\frac{5}{100}$ 40 = 2.

Естественно, тот же результат найдем, применяя правило 2:

40%(5) = 0,4·5 = 2.

Ответ: 2.

Нахождение процентного отношения двух чисел

Задача 3. Сколько процентов p число C составляет от числа D? (Перефразировка задачи 3: найти *процентное отношение чисел* C и D.)

Решение. Определяем: база – число D, объект – число C.

Составляем равенства:

D = 100%,

C = p%.

Перемножаем их «крест-накрест»: D·p = 100·C.

Находим:

$$\mathbf{p = \frac{C}{D}\,100\ (\%)}. \qquad (3)$$

На основании полученной формулы можно сформулировать правило нахождения процентного отношения чисел:

Правило 3. *Чтобы найти, сколько процентов первое число составляет от второго (то есть найти процентное отношение данных чисел),* достаточно *разделить первое число на второе (то есть найти их отношение), и полученный результат умножить на 100.*

Пример 3. Найти, сколько процентов число 0,27 составляют от числа 0,03.

Здесь: база – число 0,27, объект – число 0,03. Пример можно решить стандартным способом. Однако более рациональное решение проводим по правилу 3:

Решение (по правилу 3). 1) $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{5}$ ·100 = 20 (%).

Можно и более кратко: $\frac{4}{20}$ 100 = 20 (%).

Ответ: 20%.

3. Рассмотрим *другие задачи на проценты* для чисел.

Предварительно заметим, что авторы задач на проценты, действуя по «принципу умолчания», обычно не указывают явно, какое число следует считать процентной базой. Например, высказывание «А больше В на р%» следует понимать, как «А больше В на р% от В», считая, таким образом, что за 100% следует принимать В. Соответственно, высказывание «В меньше А на q%» следует понимать, как «В меньше А на q% от А» (процентная база – А) .

Нахождение процентного увеличения (уменьшения) числа

Задача 4. Определить на сколько процентов р число А больше числа В (А > В > 0).

Замечание. Задачу 4 можно перефразировать так: «Найти процентное увеличение переменной величины от значения В до значения А».

Решение. Определяем: база – число В, объект – число А – В.

Составляем равенства:

В = 100%,

А – В = р%.

Перемножаем их «крест-накрест»: В·р = (А – В)·100.

Находим:

$$\mathbf{p = \frac{A - B}{B}\, 100\ (\%)}. \qquad (4)$$

Полученная формула позволяет сформулировать

Правило 4*. Чтобы определить, на сколько процентов одно положительное число больше другого, достаточно найти процентное отношение разности большего и меньшего чисел к меньшему числу.*

Пример 4. На сколько процентов число 10 больше числа 4?

Определяем: база – число 4, объект – число 6. Пример можно решить стандартным способом. Однако более рациональное решение проводим на основании правил 4 и 3:

Решение (по правилам 4 и 3). $p = \frac{10 - 4}{4}100 = 150$ (%).

Ответ: 150 %.

Задача 5. Определить на сколько процентов q число В меньше числа А (А > В > 0).

Замечание. Задачу 5 можно перефразировать так: «Найти процентное уменьшение переменной величины от значения А до значения В».

Решение. Определяем: база – число А, объект – число А – В. Решая задачу стандартным способом, найдем:

$$\mathbf{q = \frac{A - B}{A} \cdot 100\ (\%)}. \qquad (5)$$

Полученная формула позволяет сформулировать

Правило 5. *Чтобы определить, на сколько процентов одно положительное число меньше другого, достаточно найти процентное отношение разности большего и меньшего чисел к большему числу.*

Пример 5. На сколько процентов число 4 меньше числа 10?

Решение. Определяем: база – число 10, объект – число 6. Пример можно решить стандартным способом. Однако более рациональное решение основано на применении правила 5:

$$\frac{10 - 4}{10} \cdot 100 = 60\ (\%).$$

Ответ: 60%.

Увеличение (уменьшение) числа на заданное количество процентов

Задача 6. Найти число X, большее числа А на p%.

Приведем три решения этой задачи.

Решение 1 (стандартным способом). Определяем: база – число А, объект – число X, составляющее 100 + p процентов от числа А.

Составляем равенства:

А = 100%,

X = (100 + p)%.

Перемножаем их «крест-накрест»: 100 X = A·(100 + p).

Находим: $X = A\,\frac{100 + p}{100}$. Итак, увеличить число А на p процентов можно по формуле

$$\mathbf{X = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)}. \qquad (6)$$

Решение 2 (по правилу 1). $X = \frac{A}{100}(100 + p) = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Вариант: $X = A + p\,\%(A) = A + \frac{A}{100}\,p = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Решение 3 (по правилу 2). $X = \frac{100 + p}{100}\,A = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Вариант: $X = A + p\,\%(A) = A + \frac{p}{100}\,A = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Очевидно, решения 2 и 3 являются более рациональными, чем стандартное решение 1.

Полученная в результате решения задачи 6 формула дает основание сформулировать правило:

Правило 6. *Чтобы увеличить число на p%, достаточно умножить его на* $1+\frac{p}{100}$.

Пример 6. Найти число, большее числа $\sqrt{5}$ на 2500%.

Решение (по правилу 6). $\sqrt{5}\,(1+\frac{2500}{100}) = 26\sqrt{5}$.

Ответ: $26\sqrt{5}$.

Задача 7. Найти число У, меньшее числа А на p% ($0 < p < 100$).

Здесь: база – число А, объект – число У, составляющее 100 – p процентов от числа А. Задачу можно решить стандартным способом. Решим ее более рационально.

Решение (по правилу 2). У = А – p%(А) = А – $\frac{p}{100}$ А. Итак, уменьшить число А на p процентов можно по формуле

$$\textbf{У} = \textbf{А}\,(\mathbf{1}-\frac{p}{\mathbf{100}}). \qquad (7)$$

Полученная формула дает основание сформулировать правило:

Правило 7. *Чтобы уменьшить число на p%, достаточно умножить его на* $1-\frac{p}{100}$.

Решение (по правилу 7). $0{,}7(1-\frac{0{,}7}{100}) = 0{,}7\cdot 0{,}993 = 0{,}6951$.

Ответ: 0,6951.

Замечание. Следует различать проценты и процентные пункты. *Процентный пункт* – это показатель, применяемый для сравнения значений переменных величин, выраженных в процентах. Более точно, если значение величины, выраженной в процентах, повысилось с p% до q%, то говорят, что ее повышение произошло на q – p процентных пунктов. Соответственно, если значение величины, выраженной в процентах, снизилось с p% до q%, то говорят, что ее снижение произошло на p – q процентных пунктов

Например, если банк увеличил процент по вкладам с 9% на 10 процентных пунктов, то он станет равным 19%. В то же время, если банк увеличил процент по вкладам с 9% на 10 процентов, то он станет равным $9\% + \frac{9\%}{100}\cdot 10$, то есть, 9,9%.

Итак, правильно говорить: «p% меньше q% на q – p *процентных пунктов*», а «p% меньше q% на $\frac{q-p}{q}\cdot 100$ процентов» и, соответственно, «p% больше q% на p – q *процентных пунктов*», а «p% больше q% на $\frac{p-q}{q}\cdot 100$ процентов».

Внимательно читайте финансовые документы!

4. Рассмотрим две простейшие *задачи на сложные* проценты для чисел (последние известны также, как *проценты от процентов*).

Задачи на сложные проценты

Предположим, что некоторая переменная величина, принимающая положительные значения, увеличивается (уменьшается) n раз, причем каждый раз на одно и то же количество процентов по сравнению с предшествующим значением. Тогда можно сказать, что имеет место n-*кратное процентное увеличение (уменьшение) переменной величины* на указанное количество процентов. Говорят, также, что она изменяется по правилу *сложных процентов* или *процентов от процентов*.

Заметим, что однократное процентное увеличение и уменьшение переменных величин на заданные количества процентов были рассмотрены в предыдущем пункте (см. задачи 6 и 7).

Задача 8. Положительное число А n раз увеличили на p% по сравнению с предыдущим значением. Какое число получили?

Решение (по правилу 6). Поскольку первоначальное значение рассматриваемой в задаче переменной величины было равно числу А, и она n раз увеличивается на p % по сравнению с предыдущим своим значением, то, согласно правилу 6, ее итоговое значение Х получится n-кратным умножением числа А на число $1 + \frac{p}{100}$:

$$\mathbf{X = A\left(1 + \frac{\boldsymbol{p}}{100}\right)^{n}}. \tag{8}$$

Пример 8. Число 64 000 трижды увеличили всякий раз на 25% по сравнению с предшествующим значением. Какое число Х в итоге получили?

Решение. Здесь: А = 64 000, p = 25, n = 3. Применяя полученную формулу, находим:
$X = 64\,000\,(1 + \frac{25}{100})^3 = 64\,000\,(\frac{5}{4})^3 = 64\,000\,\frac{125}{64} = 125\,000$.

Ответ: 125 000.

Задача 9. Положительное число А n раз уменьшили на p% (0 < p < 100) по сравнению с предыдущим значением. Какое число У получили?

Решение (по правилу 7). Поскольку первоначальное значение рассматриваемой в задаче переменной величины было равно числу А, и она n раз уменьшается на p % по сравнению с предыдущим своим значением, то, согласно правилу 7, ее итоговое значение У получится n-кратным умножением числа А на число $1 - \frac{p}{100}$:

$$\mathbf{У = A\left(1 - \frac{\boldsymbol{p}}{100}\right)^{n}}. \tag{9}$$

Пример 9. Число 64 000 трижды уменьшили всякий раз на 25% по сравнению с предыдущим значением. Какое число У в итоге получили?

Решение. Здесь: А = 64 000, p = 25, n = 3. Применяя полученную формулу, находим:

У = 64 000 $(1 - \frac{25}{100})^3$ = 64 000 $(\frac{3}{4})^3$ = 64 000 $\frac{27}{64}$ = 27 000.

Ответ: 27 000.

Замечание. Возможны и более сложные случаи. Пусть, например, величину А в первый раз увеличили на p%, во второй – уменьшили на q%
(q < 100), а в третий – увеличили на r%, тогда в итоге она, очевидно, примет значение

$$\mathbf{X = A(1 + \frac{p}{100})\,(1 - \frac{q}{100})\,(1 + \frac{r}{100}).} \qquad (10)$$

Равенства (8) – (10) называют *формулами сложных процентов*.

5. Сведем все рассмотренные в данной статье задачи в таблицу:

№№	*Названия задач*	*Формулировки задач*	*Базы, объекты*	*Формулы решений*
ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ				
1	***Нахождение числа по его процентам***	***Задача 1.*** Найти число Х, если p% от него равны числу А	Х, А	$X = \frac{A}{p}\,100$
2	***Нахождение процентов от данного числа***	***Задача 2.*** Найти число У, составляющее p% от числа В	В, У	$У = \frac{B}{100}\cdot p$, $У = \frac{p}{100}\,B$
3	***Нахождение процентного отношения двух чисел***	***Задача 3.*** Сколько процентов p число С составляет от числа D?	D, C	$p = \frac{C}{D}\,100$
ДРУГИЕ ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ				

4	***Нахождение процентного увеличения числа***	***Задача 4.*** Определить на сколько процентов p число А больше числа В	В, А – В	$p = \frac{A - B}{B}100$
5	***Нахождение процентного уменьшения числа***	***Задача 5.*** Определить на сколько процентов q число В меньше числа А	А, А – В	$q = \frac{A - B}{A}\cdot 100$
6	***Увеличение числа на заданное количество процентов***	***Задача 6.*** Найти число Х, большее числа А на р%	А, Х	$X = A\,(1 + \frac{p}{100})$,
7	***Уменьшение числа на заданное количество процентов***	***Задача 7.*** Найти число У, меньшее числа А на р%	А, У	$У = A\,(1 - \frac{p}{100})$
ЗАДАЧИ НА СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ				
8	***Нахождение числа, полученного*** n-***кратным увеличением данного числа на одно и то же количество процентов по сравнению с предшествующим значением***	***Задача 8***. Число А n раз увеличили на р% по сравнению с предыдущим значением. Какое число Х получили?		$X = A(1 + \frac{p}{100})^n$
9	***Нахождение числа, полученного*** n-***кратным уменьшением данного числа на одно и то же количество процентов по сравнению с***	***Задача 9***. Число А n раз уменьшили на р% (0 < p < 100) по сравнению с предыдущим значением. Какое число У получили?		$У = A(1 - \frac{p}{100})^n$

	предшествующим значением			

Замечание. Все рассмотренные задачи 1 – 9 сформулированы для чисел. *С*оответствующие задачи для величин формулируются и решаются аналогично, с той лишь разницей, что используются *именованные числа* этих величин. При этом в задачах, в которых величины складываются или вычитаются, предполагается, что они *однородные* (то есть характеризуют одно и то же свойство реальных объектов или явлений) и выражены в одинаковых *единицах измерения*.

6. В заключение сделаем комментарии методологического характера.

Комментарий 1. Значительную трудность для начинающих представляет тот факт, что термин «процент» используется по крайней мере в двух контекстах, причем чаще всего не уточняется какой из них имеется в виду в конкретной ситуации.

Во-первых, *процентом* называют дробь $\frac{1}{100}$ ($1\% = \frac{1}{100}$). Соответственно, для любого положительного числа p *p процентов* есть дробь $\frac{p}{100}$ ($p\% = \frac{p}{100}$). Отметим, что рассмотренная трактовка предполагает, что процентная база зафиксирована – число 1.

Во-вторых, определяется *процент <u>от</u> положительного числа (величины)*, как сотая часть этого числа (величины). В этом случае указанное число (величина) есть процентная база. В данной статье мы придерживаемся именно этой трактовки термина «процент».

В этом случае p% от числа (величины) A (p%(A)) можно найти по формуле

$$p\%(A) = 1\%(A)\cdot p = \frac{A}{100}\cdot p.$$

Полученную формулу можно переписать в виде $p\%(A) = \frac{p}{100}\cdot A$ или, что тоже самое, в виде

$$\underline{p\%(A)} = \underline{p\%}\cdot A.$$

Она связывает две рассмотренные трактовки процентов. В частности, при
A = 1 получаем

$$p\%(1) = p\%.$$

Таким образом, можно сказать, что вторая трактовка обобщает первую. В отличие от действующего белорусского учебника алгебры [1] именно она положена в основу изложенной здесь методики введения в проценты. На наш взгляд, отказ от трактовки процента как числа 0,01, позволяет сделать изложение более корректным.

Комментарий 2. Заметим, что в белорусских учебниках математики проценты вводятся как дроби, а в российских и украинских, как правило, – как сотые части чисел (величин).

Сразу бросается в глаза, что в первом случае объем понятия *процент* чрезвычайно узок (состоит из одного числа), в связи с чем его нельзя считать содержательным математическим понятием, а следует признать лишь техническим обозначением числа $\frac{1}{100}$. Напротив, понятие *процент от числа* А достаточно содержательно. Оно имеет четко выраженный функциональный смысл – его определение, по сути дела вводит в рассмотрение линейную функцию – прямую пропорциональность %(А) = $\frac{\text{А}}{100}$, заданную на множестве положительных чисел. При этом *процен*т является всего лишь одним из континуума значений этой функции: % = %(1). Итак, основными в школьной математике являются две трактовки понятия «процент» – *процент* (*как дробь* $\frac{1}{100}$) и *процент от числа*. Уже в связи с бóльшей общностью вторую из них следует признать предпочтительной.

В ее пользу говорят также естественность и практичность. Дело в том, что решение даже простейших школьных задач с опорой на процент как дробь 0,01 превращается в странное действо, ставящее школьников в весьма затруднительное положение. Ведь исходя из своего практического опыта, ученики знают, что по своей сути «процент» – понятие относительное, и для разных чисел может принимать разные значения. А в учебнике утверждается, что процент это однозначно число $\frac{1}{100}$!

Анализ курсов математики, в которых принято, что % = $\frac{1}{100}$, показывает, что, переходя к решению более или менее сложных задач, их авторы все же вынуждены обращаться к содержательному понятию *процент от числа*. Происходит это, как правило, таким образом: несколькими страницами позже записывают нечто вроде следующего – «Для решения задач на проценты нужно понимать, что <u>1 % – это сотая часть числа</u> (подчеркнуто нами), а несколько процентов – несколько сотых частей числа».

Очевидно, при этом происходит подмена понятий – то что раньше назвали сотой частью единицы теперь без всяких оснований называют сотой частью числа. Другими словами, начинают неявно использоваться одновременно две трактовки процентов, указанные выше. Естественно, возникает терминологическая путаница, превращающая изложение в некорректное. Решение самых простых задач превращается в проблему.

Комментарий 3. Выбирая в качестве процентных баз различные положительные числа, проценты можно трактовать, как различные единицы измерения положительных чисел, а, соответственно, *положительные числа – как величины, которые можно измерять процентами*.

Примем, например, число 5 за 1%. Тогда, скажем, 1,5 = $\frac{1,5}{5}$·5 = 0,3·1% = 0,3%. Другими словами, если числа измерять пятерками, то число 1,5 равно 0,3 пятерки. Обратно, если 0,3% = 1,5, то 1% = $\frac{1,5}{0,3}$ = 5. Соответственно, 100% = 500 (сто пятерок). Можно также сказать, что в данном случае процентная база равна 500.

Если же мы примем, что 1% = 3, то 1,5 = 0,5% (процентная база – 300). Если считать, что
1% = 1, то 1,5 = 1,5% (процентная база – 100). Если же 1% = 0,01, то 1,5 = $\frac{1,5}{0,01}$·0,01 = 150·1% = 150% (процентная база – 1).

Можно даже утверждать, что, любое положительное число равно любому наперед заданному положительному числу процентов. Более точно: если мы хотим считать, что A = B% (A > 0, B > 0), то за 1% следует принять число $\frac{A}{B}$ ($\frac{A}{B}$ = 1%). В самом деле, тогда A = B·$\frac{A}{B}$ = B% (процентная база – $\frac{A}{B}$·100)!

В этом случае всякое положительное число C составит $\frac{B}{A}$·C%.

С функциональной точки зрения это выглядит так: введена линейная функция f(x) = $\frac{p}{100}$·x,
x ∈ (0; + ∞) с параметром p, p ∈ (0; + ∞) (ее можно было бы назвать *процентной*), которая каждому положительному числу x ставит в соответствие p процентов от него (x – процентная база, f(x) – объект). Любое положительное число A, очевидно, является значением этой функции при любом наперед заданным положительном значении B параметра p (p = B) при x = $\frac{A}{B}$·100.

Покажем, как измерение положительных чисел процентами может быть использовано для решения задач. Пусть, например, верны равенства A = p%(X) и B = q%(X) (кратко: A = p% и
B = q%, % = %(X) – единица измерения, X – произвольно выбранная процентная база). Перемножая их «крест-накрест», получим верное равенство A q% = B p%. Деля обе его части на 1%(X), получим числовое равенство A q = B p. Из него вытекают четыре формулы (A = B $\frac{p}{q}$,

$B = A\frac{q}{p}$, $p = q\frac{A}{B}$, $q = p\frac{B}{A}$), по каждой из которых можно решить соответствующую задачу на проценты. В частности, если,

$p = 100$ (число A принято за 100 процентов), то получаем формулы $A = B\frac{100}{q}$, $B = A\frac{q}{100}$, $q = 100\frac{B}{A}$, по которым решаются три основные задачи на проценты – нахождения числа по его процентам, нахождения процентов от данного числа и нахождения процентного отношения чисел соответственно.

Заметим, что перемножая равенства A = p% и B = q% не «крест накрест», а почленно, также получим верное равенство (AB = p% q%), которое однако неудобно с технической точки зрения. Именно поэтому умножение следует проводить «крест-накрест».

К слову, равенство A q = B p, можно переписать в виде пропорции $\frac{A}{B} = \frac{p}{q}$. Отметим, что именно пропорции чаще всего привлекаются к решению задач на проценты. Обычно они мотивируются следующим образом: «Очевидно, числа, выраженные процентами от одного и того же числа, прямо пропорциональны количествам их процентов».

Собственно, использование пропорций – хороший способ решения задач на проценты. Его слабое место, на наш взгляд, в том, что равенства, из которых вытекает пропорция, используются неявно («держатся в секрете»). Вместо них часто используются суррогатные записи типа X – 100%, C – r%, смысл которых не всегда понятен школьникам.

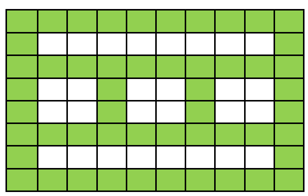
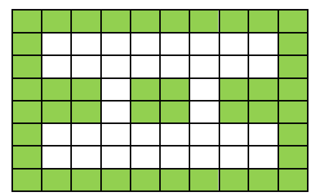
Практикум (*базовый уровень*)

Возможна следующая схема проведения практикума: в аудитории (под руководством преподавателя) выполняются задания с нечетными номерами, дома (самостоятельно) – задания с четными номерами. Полезно хотя бы в некоторых случаях решать задачи двумя способами – стандартным и привлекая соответствующее правило из правил 1 – 7. После выполнения всех заданий для домашней работы рекомендуется проверить правильность полученных ответов и провести работу по исправлению ошибок.

Таблица заданий

№№	Задания для аудиторной работы	№№	Задания для домашней работы

1	Найти число, если 130% от него составляет 169	**2**	Найти объем цистерны, если 0,3% от него составляет 3 л
3	Найти 33% от 300	**4**	Найти 40% от 60 м
5	Сколько процентов число $\frac{1}{3}$ составляет от числа 4?	**6**	Сколько процентов от 11 карандашей составляют 44 карандаша?
7	На сколько процентов 0,4 больше 0,1?	**8**	На сколько процентов масса Мани (60 кг) меньше массы Вани (75 кг)?
9	Найти число, большее числа 100 на 3%	**10**	Найти скорость велосипедиста, если она на 75% меньше скорости мотоциклиста, равной 60 $\frac{км}{ч}$
11	Какой стала цена картины после трехкратного ее повышения на 10%, если первоначальная цена была 1 миллион долларов?	**12**	Какой стала цена гоночного автомобиля после трехкратного ее понижения на 10%, если первоначальная цена была 1 миллион долларов?
13	Посудомойка вымыла 40 стаканов, что составляет 16% от всех, имевшихся в столовой. Сколько стаканов было в столовой?	**14**	Каков размер скачиваемого файла, если загруженные 40% от него равны 64 мегабайтам?
15	В коробке – 30 шоколадных конфет, из которых 10% – со сливочной начинкой. Сколько конфет со сливочной начинкой было в коробке?	**16**	За день молочный завод изготовил 500 кг творога, из которых 70-ти процентам был присвоен высший сорт. Сколько кг творога высшего сорта было изготовлено за день?
17	Из 32 тестовых заданий 20 абитуриент выполнил правильно. Сколько процентов тестовых заданий он выполнил правильно?	**18**	По итогам сессии в группе из 25 человек трое оказались отличниками. Сколько процентов от всех студентов группы составили отличники?
19	На сколько процентов один бит меньше одного байта? *Справка*: 1 байт = 8 битов.)	**20**	На сколько процентов рост Иванова (180 см) больше роста Петрова (160 см)?

21	Найти число А, если число 32 на 60% больше него.	**22**	Купили 9 кг яблок по цене 3 рубля за килограмм. Сколько килограммов яблок можно купить на те же деньги после снижения цены на 10%?
23	Цену квартиры сначала повысили на 10%, а затем снова снизили на 10%. На сколько процентов снизилась первоначальная цена?	**24**	Цену квартиры сначала снизили на 10%, а затем снова повысили на 10%. На сколько процентов снизилась первоначальная цена?
25	На сколько процентов площадь закрашенной части прямоугольника больше площади не закрашенной части? 	**26**	На сколько процентов площадь не закрашенной части прямоугольника меньше его площади? 
27	Ваня старше Мани на 50%. На сколько процентов Маня младше Вани?	**28**	Скорость велосипедиста на 75% меньше скорости мотоциклиста. На сколько процентов скорость мотоциклиста больше скорости велосипедиста?
29	Отрезали $\frac{4}{5}$ части треугольника. Сколько процентов от его площади это составляет?	**30**	Определите процент жирности молока, если в 20 кг его содержится 640 г жиров
31	На сколько процентов увеличится произведение двух положительных чисел, если одно из них увеличить на 10%, а второе – на 60%?	**32**	На сколько процентов уменьшится обыкновенная дробь, если ее числитель уменьшить на 70%, а знаменатель увеличить на 20%?

33	В коробке лежат белые и черные шары. Известно, что количество белых шаров составляет 12% от количества черных. Найти процентное отношение количеств белых шаров и всех шаров в коробке	**34**	На плантации растут голубика и ежевика, причем что количество кустов голубики составляет 88% от количества кустов ежевики. Найти процентное отношение количеств кустов голубики и всех кустов на плантации
35	Известно, что число Х больше числа У на 75%, а сумма этих чисел равна 550. Найти число У	**36**	Одно число меньше другого на 125, что составляет 25% большего числа. Найти меньшее число
37	Кусок сплава железа и меди массой в 72 кг содержит 45% железа. Какую массу железа нужно добавить к нему, чтобы получить новый сплав, содержащий 60% железа?	**38**	В двух бочках содержится 140 л керосина. Если из первой бочки перелить во вторую 30% керосина, то керосина в бочках станет поровну. Сколько литров керосина было в каждой бочке?
39	На овощной базе было 200 кг огурцов. Анализ показал, что в них 46% воды. Через некоторое время часть воды испарилась, и её процентное содержание в огурцах упало до 40%. Сколько теперь весят огурцы?	**40**	Свежие шампиньоны содержат 90% воды, а сухие – 12% воды. Сколько сухих шампиньонов получится из 44 кг свежих?

Таблица ответов

№№	**Ответы к заданиям для аудиторной работы**	**№№**	**Ответы к заданиям для домашней работы**
1	130	**2**	1000 л
3	99	**4**	24 м
5	$8\frac{1}{3}$%	**6**	400%

7	300%	**8**	20%
9	103	**10**	15 $\frac{км}{ч}$
11	1 331 000 долларов	**12**	729 000 долларов
13	250 стаканов	**14**	160 Мб
15	3 конфеты	**16**	350 кг
17	62,5%	**18**	12%
19	87,5%	**20**	12,5%
21	80%	**22**	10 кг
23	1%	**24**	1%
25	$85\frac{5}{7}$ %	**26**	55%
27	33,(3)%	**28**	300%
29	40%	**30**	3,2%
31	76%	**32**	75%
33	$10\frac{5}{7}$%	**34**	$46\frac{38}{47}$%
35	200	**36**	37
37	27 кг	**38**	100 л, 40 л
39	180 кг	**40**	5 кг

Дополнительные упражнения

1) Известно, что, если A:B = k. Сколько процентов составляет A от B и B от A?

2) Известно, что число A составляет p% от некоторого числа. Сколько процентов составляет число $\frac{1}{A}$ от того же числа?

3) Известно, что число A составляет p% от некоторого числа, а число B – q% от того же числа. Найти $\frac{A}{B} - \frac{p}{q}$.

4) Известно, что число A составляет p% от числа B, а число B – q% от некоторого числа. Сколько процентов составляет число A от того же числа?

5) Известно, что число A составляет p% от некоторого числа, а число B – q% от него же. Сколько процентов от того же числа составляют числа: A + B; A·B; $\frac{A}{B}$; $\frac{B}{A}$?

Ответы: 1) 100k% и $\frac{100}{k}$ %. 2) $\frac{p}{A^2}$%. 3) 0. 4) $\frac{pq}{100}$%. 5) (p + q)%; Aq% или, что то же самое, Bp %; $\frac{p^2}{Aq}$% или, что то же самое, $\frac{p}{B}$%; $\frac{q}{A}$% или, что то же самое, $\frac{q^2}{Bp}$%.

Литература

1. ***Герасимов, В.Д.*** **(2018).** Математика: учеб. пособие для 6-го кл. учрежд. общ. сред. образования с рус. яз. обучения /В.Д. Герасимов, О.Н. Пирютко. – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2018. – 320 с. : ил.

ՏՈԿՈՍՆԵՐԻ ՆԵՐՄՈՒԾՄԱՆ ԵՎՍ ՄԵԿ ԵՂԱՆԱԿ

Զոլոտուխին Յուրի Պրոկոֆևիչ

Ամփոփում: Նշված եղանակը հիմնված է դրական թվերի՝ որպես մեծությունների, մեկնաբանման վրա, որոնց չափման միավորները տոկոսներն են: Ներդրվում են նաև «տոկոսային հիմք» և «օբյեկտ» տեխնիկական եզրույթները, որոնք թույլ են տալիս ավելի հստակ մոդելավորել տոկոսների վերաբերյալ խնդիրները, խնայել ժամանակը և համառոտագրել դրանց լուծման գործընթացում: Շարադրանքն ուղեկցվում է ուսուցիչների համար նախատեսված մեթոդաբանական բնույթի մեկնաբանություններով: Արդյունքում առաջարկվում է լսարանային սեմինար հիմնական մակարդակի համար «Տոկոսներ» թեմայով: Նյութը կարելի է օգտագործել նախապատրաստական դասընթացների և անհատական պարապմունքների համար, այն թույլ է տալիս կարճ ժամանակում կազմակերպել կրկնություն նշված թեմայի շուրջ: Փորձարկվել է Գրոդնոյի պետական համալսարանի նախապատրաստական դասընթացների դասավանդման գործընթացում:

Բանալի բառեր: Տոկոս, տոկոսային հիմք, օբյեկտ, տոկոսային կետ, տոկոսային հարաբերություններ, տոկոսային աճ, տոկոսային նվազում, բարդ տոկոսներ:

ONE MORE WAY OF INTRODUCTION TO PERCENTAGES

Zolotukhin Yury Prokofievich

Summary. The method indicated in the name is based on the interpretation of positive numbers as quantities, the units of which are percentages. The technical terms "percentage base" and "object" are also introduced, allowing you to more clearly model tasks for percentages, save time and make brief notes in the process of solving them. The presentation is accompanied by methodological comments intended for teachers. It concludes with a basic classroom workshop on interest. The material is ready for use in the educational process of preparatory courses and individual rehearsal sessions, allowing

you to organize a repetition on a specified topic in a short time. Tested in the process of teaching at the preparatory courses of the Grodno State University.
Keywords. Percentage, percentage base, object, percentage point, percentage ratio, percentage increase, percentage decrease, compound percentages.

ЕЩЕ ОДИН СПОСОБ ВВЕДЕНИЯ В ПРОЦЕНТЫ

Золотухин Юрий Прокофьевич

Резюме. Указанный в названии способ основывается на интерпретации положительных чисел как величин, единицами измерения которых выступают проценты. Вводятся также технические термины «процентная база» и «объект», позволяющие более четко моделировать задачи на проценты, экономить время и выполнять краткие записи в процессе их решения. Изложение сопровождается комментариями методологического характера, предназначенными для учителей. В завершение предлагается аудиторный практикум базового уровня по теме «Проценты». Материал готов для использования в учебном процессе подготовительных курсов и индивидуальных репетиционных занятий, позволяют организовать повторение по указанной теме за короткое время. Апробирован в процессе преподавания на подготовительных курсах Гродненского государственного университета.
Ключевые слова. Процент, процентная база, объект, процентный пункт, процентное отношение, процентное увеличение, процентное уменьшение, сложные проценты.

Получено в редакцию - 22.03.2023
Рецензирована – 22. 08.2023
Отправлен на сайт – 28.08.2023